ESERCIZIO 1
Si faccia riferimento all’Allegato A - OPS 2016, problema ricorrente REGOLE E DEDUZIONI, pagina 2.

PROBLEMA
Sono date le seguenti regole:

regola(1,[p,d,r],w)	regola(2,[a,t,u],p)	regola(3,[a,b,r],u)
regola(4,[a,s],b)	regola(5,[b,c,r],d)	regola(6,[a,b,u],v)
regola(7,[r],a)	regola(8,[t],c)	regola(9,[a,b,s],u)
regola(10,[a,r],b)	regola(11,[s],a)	regola(12,[p,d,v],e)
regola(13,[b],t)	regola(14,[b,c,s],d)	regola(15,[p,d,w],f)
regola(16,[w,z],g)	regola(17,[w,k],z)	regola(18,[r,q],k)

Trovare:
1. la lista L1 che descrive il procedimento per dedurre **e** conoscendo **s**;
2. la lista L2 che descrive il procedimento per dedurre **f** conoscendo **r**;
3. la lista L3 che descrive il procedimento per dedurre **g** conoscendo **q, r**.

L1	[ ]
L2	[ ]
L3	[ ]

SOLUZIONE

L1	[11,4,9,6,13,2,8,14,12]
L2	[7,10, 3,13,2,8,5,1,15]
L3	[7,10,3,13,2,8,5,1,18,17,16]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Per la prima domanda, osservato che **r** non è dato, né deducibile, non ci sono scelte (di regole alternative) da fare; occorre invece porre attenzione alla successione delle regole nella lista.
Una tabella come la seguente può essere utile per controllare che viene applicata la regola con sigla più bassa. La seconda riga contiene gli elementi via via noti, mentre la terza riga contiene (in maniera sfasata) le sigle delle regole via via applicate: è facile controllare che una regola ha la sigla più bassa tra quelle applicabili essendo noti gli elementi posti nelle colonne che precedono quella in cui compare la regola.

DATO	INCOGNITE VIA VIA DEDOTTE																		
s		a		b		u		v		t		p		c		d		e	
	11		4		9		6		13		2		8		14		12		
	REGOLE VIA VIA APPLICATE																		

Per esempio, noti **s**, **a**, **b** si possono applicare le regole 9 e 13; naturalmente si applica la 9 che deduce **u**; a questo punto diventa applicabile la regola 6 che quindi precede la 13.

Per la seconda domanda, osservato che **s** non è dato, né deducibile, non ci sono scelte (di regole alternative) da fare; occorre invece porre attenzione alla successione delle regole nella lista.
Una tabella come la seguente può essere utile per controllare che viene applicata la regola con sigla più bassa.

DATO	INCOGNITE VIA VIA DEDOTTE																		
r		a		b		u		t		p		c		d		w		f	
	7		10		3		13		2		8		5		1		15		
	REGOLE APPLICATE																		

Per esempio, noti **r**, **a**, **b** si possono applicare le regole 3 e 13; noti **r**, **a**, **b**, **u** si possono applicare le regole 8 e 2.

Per la terza domanda (molto simile alla seconda) si ha la seguente tabella.

DATI		INCOGNITE VIA VIA DEDOTTE																						
q	r		a		b		u		t		p		c		d		w		k		z		g	
		7		10		3		13		2		8		5		1		18		17		16		
		REGOLE APPLICATE																						

Si noti che la regola 18 sarebbe già applicabile al primo passo.

ESERCIZIO 2
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, problema ricorrente PERCORSI IN UN GRAFO, pagina 6.

PROBLEMA
È dato un grafo descritto dal seguente elenco di archi:

a(n4,n2,4)	a(n3,n5,5)	a(n1,n7,2)	a(n6,n10,7)	a(n5,n2,4)	a(n4,n1,6)
a(n4,n12,3)	a(n7,n4,3)	a(n2,n9,4)	a(n6,n3,2)	a(n6,n11,3)	**a(n9,n7,3)**
a(n1,n12,4)	a(n8,n11,1)	a(n8,n10,2)	a(n8,n12,6)	**a(n10,n5,4)**	

I nodi riportati in grassetto sono a senso unico, percorribili solo dal primo nodo a sinistra verso il secondo. Disegnare il grafo e trovare:

1. la lista L1 del percorso più breve tra n1 e n3;
2. la lista L2 del percorso semplice più lungo tra n1 e n3.

Successivamente al grafo precedente vengono aggiunti due collegamenti diretti fra il nodo n4 e il nodo n10, **a(n4,n10,1)** e **a(n10,n4,10)**, entrambi a senso unico dal nodo di sinistra al nodo di destra. Sul grafo così ampliato, trovare:

3. la lista L3 del percorso più breve tra n1 e n3;
4. la lista L4 del percorso semplice più lungo tra n1 e n3.

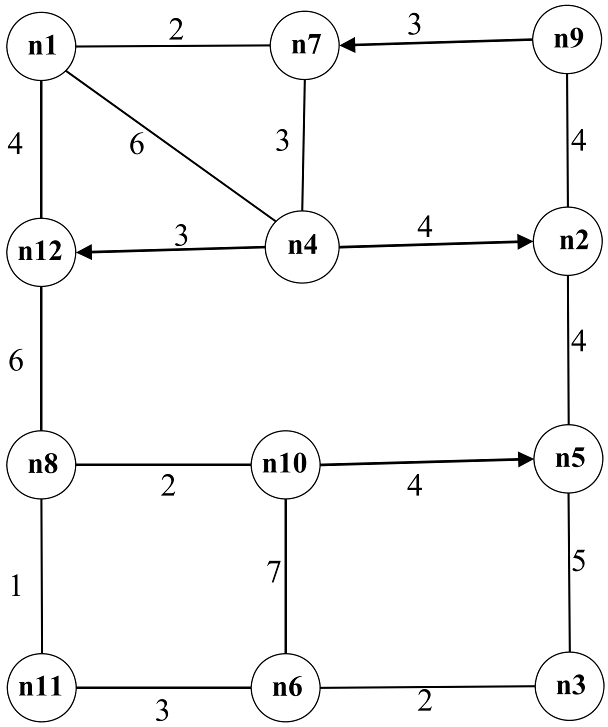
L1	[ ]
L2	[ ]
L3	[ ]
L4	[ ]

SOLUZIONE

L1	[n1, n12, n8, n11, n6, n3]
L2	[n1, n4, n12, n8, n11, n6, n10, n5, n3]
L3	[n1, n7, n4, n10, n8, n11, n6, n3]
L4	[n1, n12, n8, n11, n6, n10, n4, n2, n5,n3]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Per risolvere problemi di questo tipo, occorre costruire tutti i percorsi tra due nodi dati; questi percorsi possono essere facilmente "organizzati" in un albero; la radice è il nodo di partenza; ogni nodo dell'albero ha tanti figli quanti sono i nodi a lui adiacenti nel grafo, purché non compaiono già nell'albero come suoi antenati; le foglie sono il nodo finale o altri nodi che non hanno figli perché tutti i nodi adiacenti (nel grafo) compaiono già tra i loro antenati (nell'albero); i percorsi sono i "rami" che dalla radice dell'albero vanno alle foglie etichettate col nodo finale.

Per rispondere alle prime due domande, un possibile *layout* del grafo è mostrato nella seguente figura.

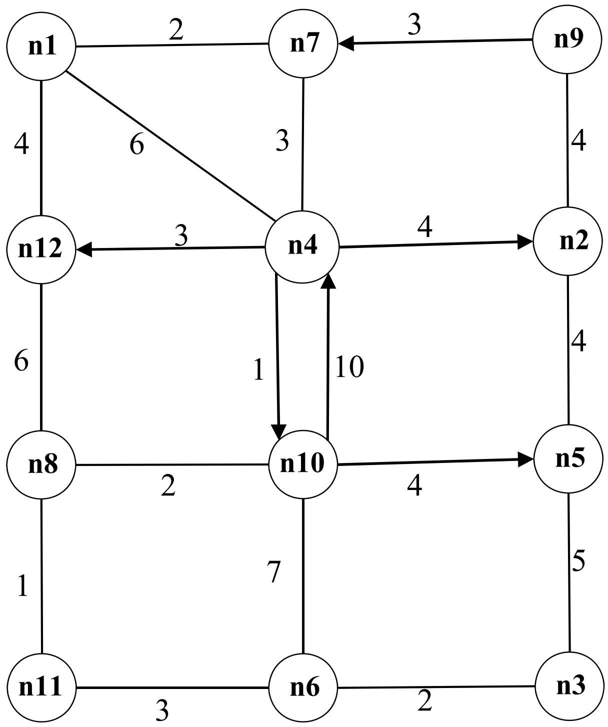


N.B. Il grafo è planare, cioè è possibile disegnarlo su un piano senza che gli archi si incrocino. Le lunghezze associate agli archi (che, per esempio, rappresentano delle strade) non sono legate alle reali lunghezze dei segmenti che li rappresentano nel grafo.
Le frecce indicano i sensi unici.

I percorsi semplici tra n1 e n3 sono i 14 elencati di seguito.

PERCORSO	LUNGHEZZA	COMMENTO
[n1,n7,n4,n12,n8,n11,n6,n10,n5,n3]	34	
[n1,n7,n4,n12,n8,n11,n6,n3]	20	
[n1,n7,n4,n12,n8,n10,n6,n3]	25	
[n1,n7,n4,n12,n8,n10,n5,n3]	25	
[n1,n7,n4,n2,n5,n3]	18	
[n1,n12,n8,n11,n6,n10,n5,n3]	30	
[n1,n12,n8,n11,n6,n3]	16	più breve
[n1,n12,n8,n10,n6,n3]	21	
[n1,n12,n8,n10,n5,n3]	21	
[n1,n4,n12,n8,n11,n6,n10,n5,n3]	35	più lungo
[n1,n4,n12,n8,n11,n6,n3]	21	
[n1,n4,n12,n8,n10,n6,n3]	26	
[n1,n4,n12,n8,n10,n5,n3]	26	
[n1,n4,n2,n5,n3]	19	

Per rispondere alle altre due domande, un possibile *layout* del grafo è mostrato nella seguente figura.

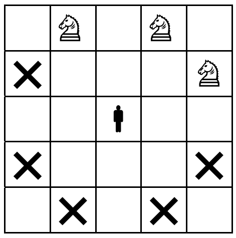


I percorsi semplici tra n1 e n3 sono i 22 elencati di seguito.

PERCORSO	LUNGHEZZA	COMMENTO
[n1,n7,n4,n12,n8,n11,n6,n10,n5,n3]	34	
[n1,n7,n4,n12,n8,n11,n6,n3]	20	
[n1,n7,n4,n12,n8,n10,n6,n3]	25	
[n1,n7,n4,n12,n8,n10,n5,n3]	25	
[n1,n7,n4,n2,n5,n3]	18	
[n1,n7,n4,n10,n6,n3]	15	
[n1,n7,n4,n10,n8,n11,n6,n3]	14	più breve
[n1,n7,n4,n10,n5,n3]	15	
[n1,n12,n8,n11,n6,n10,n5,n3]	30	
[n1,n12,n8,n11,n6,n10,n4,n2,n5,n3]	44	più lungo
[n1,n12,n8,n11,n6,n3]	16	
[n1,n12,n8,n10,n6,n3]	21	
[n1,n12,n8,n10,n5,n3]	21	
[n1,n12,n8,n10,n4,n2,n5,n3]	35	
[n1,n4,n12,n8,n11,n6,n10,n5,n3]	35	
[n1,n4,n12,n8,n11,n6,n3]	21	
[n1,n4,n12,n8,n10,n6,n3]	26	
[n1,n4,n12,n8,n10,n5,n3]	26	
[n1,n4,n2,n5,n3]	19	
[n1,n4,n10,n6,n3]	16	
[n1,n4,n10,n8,n11,n6,n3]	15	
[n1,n4,n10,n5,n3]	16	

ESERCIZIO 3
Si faccia riferimento al problema ricorrente MOVIMENTO DI PEZZI DEGLI SCHACCHI, pagina 20.

PROBLEMA
In un campo di dimensioni **9×9** un robot si muove come il cavallo nel giuoco degli scacchi; gli sono vietate, però, le mosse nelle direzioni della rosa dei venti comprese nella seguente lista: [sse,ese,sso,oso,ono], cioè le mosse del robot in questo problema si riducono a quelle illustrate (col simbolo ♘) nella seguente figura.



Nel campo di gara le caselle della seguente lista sono interdette al robot:

[[4,2],[4,4],[5,2],[5,3],[5,4],[5,5]]

N.B. Un elemento della lista descrive una casella indicandone le coordinate a partire dallo spigolo in basso a sinistra del campo di gara.
Inoltre, in certe caselle ci sono dei premi che il robot raccoglie passandoci; i premi presenti sono descritti dalla seguente lista:

[[3,6,8],[2,4,10],[4,3,7],[5,6,12]].

N.B. Un elemento della lista ha la forma: [<ascissa>,<ordinata>,<premio>].

Partendo dalla casella [1,1], il robot deve raggiungere la casella [9,9]. Trovare:
1. il numero N di percorsi in cui si raccoglie una quantità di premi pari a 17;
2. la lista L1 del percorso in cui si raccoglie il maggior numero complessivo di premi;
3. la lista L2 del percorso in cui si raccoglie un premio complessivo pari a 18.
4. La lista L3 del percorso in cui si raccoglie il minor numero di premi.

N	
L1	
L2	
L3	

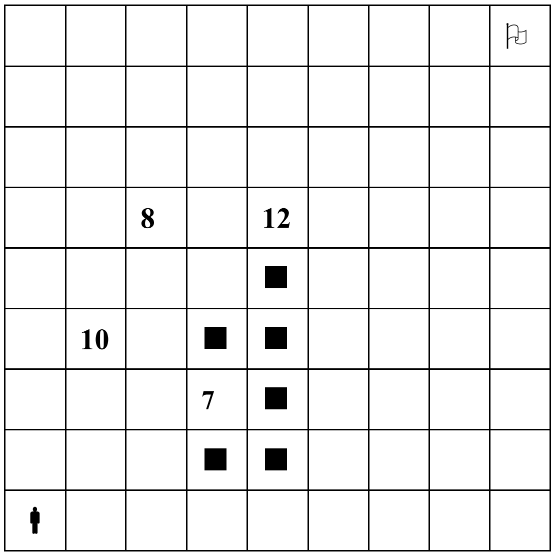
SOLUZIONE

N	0
L1	[[1,1],[3,2],[2,4],[3,6],[5,7],[7,8],[9,9]]
L2	[[1,1],[3,2],[2,4],[3,6],[5,7],[7,8],[9,9]]
L3	[[1,1],[2,3],[1,5],[3,6],[5,7],[7,8],[9,9]]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Esiste una maniera sistematica per trattare problemi di questo tipo: costruire l'*albero delle possibili mosse*. Ogni nodo dell'albero è etichettato con le coordinate di una casella; si inizia con la *radice* che è la casella in cui parte il robot; poi ad ogni nodo si aggiungono tanti *figli* quante sono le caselle raggiungibili dal robot posto nella casella corrispondente a quel nodo. Naturalmente il robot non può tornare in una casella in cui è già stato.

I nodi in cui ci si arresta (cioè le foglie dell'albero) sono la *meta* o una casella da cui il robot non si può muovere.

In casi "semplici", come il presente, si possono costruire direttamente tutti i percorsi possibili.
N.B. Il presente caso è "semplice" perché al robot è permesso di muoversi essenzialmente verso l'alto, quindi è facile visualizzarne i percorsi.
Il campo di gara è mostrato nella figura.



Da [1,1] il robot può andare in [2,3] o in [3,2]; è facile vedere che nel primo caso può raggiungere la meta mediante un solo percorso (a causa della limitazione dei movimenti) durante il quale raccoglie solo un premio di 8. Da [3,2] il robot può andare solo in [2,4]; da qui solo in [3,6] e [4,5]: infatti da [1,6] non potrebbe più raggiungere la meta. La prima alternativa (come già visto) può essere completata in una sola maniera; la seconda in tre modi diversi.
Ricapitolando i percorsi possibili e i premi complessivi raccolti sono:

PERCORSI	PREMI RACCOLTI
[[1,1],[2,3],[1,5],[3,6],[5,7],[7,8],[9,9]]	8
[[1,1],[3,2],[2,4],[3,6],[5,7],[7,8],[9,9]]	18
[[1,1],[3,2],[2,4],[4,5],[5,7],[7,8],[9,9]]	10
[[1,1],[3,2],[2,4],[4,5],[6,6],[7,8],[9,9]]	10
[[1,1],[3,2],[2,4],[4,5],[6,6],[8,7],[9,9]]	10

ESERCIZIO 4
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO, pagina 23.

PROBLEMA
Si consideri la seguente procedura ALFA.

```
procedure ALFA;
variables M, K, J integer;
M ← 0;
for K from 1 to 3 step 1 do;
    for J from 1 to 4 step 1 do;
        M ← K × (J - M);
    endfor;
    output M;
endfor;
endprocedure;
```

Costruire la lista L1 contenente nell'ordine da sinistra a destra i valori prodotti in output.
N.B. I numeri interi positivi devono essere scritti senza segno; i numeri interi negativi sono preceduti da "-" senza spazi.

L1	[ ]

SOLUZIONE

L1	[2,28,2226]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Occorre eseguire passo passo la procedura, come mostrato dalla seguente tabella.

	valori di K	valori di J	valori di M	output
M ← 0;	indefinito	indefinito	0	
prima esecuzione del "for" K	1	1	K × (J - M) = 1 × (1 - 0) = 1	
	1	2	K × (J - M) = 1 × (2 - 1) = 1	
	1	3	K × (J - M) = 1 × (3 - 1) = 2	
	1	4	K × (J - M) = 1 × (4 - 2) = 2	2
seconda esecuzione del "for" K	2	1	K × (J - M) = 2 × (1 - 2) = -2	
	2	2	K × (J - M) = 2 × (2 + 2) = 8	
	2	3	K × (J - M) = 2 × (3 - 8) = -10	
	2	4	K × (J - M) = 2 × (4 + 10) = 28	28
terza esecuzione del "for" K	3	1	K × (J - M) = 3 × (1 - 28) = -81	
	3	2	K × (J - M) = 3 × (2 + 81) = 249	
	3	3	K × (J - M) = 3 × (3 - 249) =-738	
	3	4	K × (J - M) = 3 × (4 + 738) =2226	2226

ESERCIZIO 5
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO, pagina 23.

PROBLEMA
Si consideri la seguente procedura BETA.

```
procedure BETA;
variables B, M, K, J integer;
M ← 0;
for K from 1 to 3 step 1 do;
    for J from 1 to 4 step 1 do;
        M ← - K × (J + M) +1;
    endfor;
    output M;
endfor;
endprocedure;
```

Costruire la lista L2 contenente nell'ordine da sinistra a destra i valori prodotti in output.
N.B. I numeri interi positivi devono essere scritti senza segno; i numeri interi negativi sono preceduti da "-" senza spazi.

L2	[ ]

SOLUZIONE

L2	[-2,-33,-2651]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Occorre eseguire passo passo la procedura, come mostrato dalla seguente tabella.

	valori di K	valori di J	valori di M	output
M ← 0;	indefinito	indefinito	0	
prima esecuzione del "for" K	1	1	- K × (J + M) +1 = -1 × (1 + 0) + 1= 0	
	1	2	- K × (J + M) +1 = -1 × (2 + 0) + 1= -1	
	1	3	- K × (J + M) +1 = -1 × (3 - 1) + 1= -1	
	1	4	- K × (J + M) +1 = -1 × (4 - 1) + 1= -2	-2
seconda esecuzione del "for" K	2	1	- K × (J + M) +1 = -2 × (1 - 2) + 1 = 3	
	2	2	- K × (J + M) +1 = -2 × (2 + 3) +1 = -9	
	2	3	- K × (J + M) +1 = -2 × (3 - 9) + 1 = 13	
	2	4	- K × (J + M) +1 = -2 × (4 + 13) + 1 = -33	-33
terza esecuzione del "for" K	3	1	- K × (J + M) +1 = -3 × (1 - 33) + 1 = 97	
	3	2	- K × (J + M) +1 = -3 × (2 + 97) + 1 = -296	
	3	3	- K × (J + M) +1 = -3 × (3 - 296) + 1 = 880	
	3	4	- K × (J + M) +1 = -3 × (4 + 880) + 1 = -2651	-2651

ESERCIZIO 6
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO, pagina 23.

PROBLEMA
Si consideri la seguente procedura GAMMA.

```
procedure GAMMA;
variables A, B, C, D, E, F, J integer;
E ← 0;
input A;
B ← 990;
F = B – A;
C ← A × B + A + 10 × B;
D ← C × A;
for J from 1 to D step 1 do;
        E ← E + 1 + 10 × J × C;
        E ← E + J × F × C;
endfor;
output E;
endprocedure;
```

Se il valore di input per A è 1000, determinare il valore di output per E.

SOLUZIONE

1000900000

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Il ciclo "for" somma 1 alla variabile E che alla fine ha il valore di D; infatti il valore di $10 \times J \times C$ è l'opposto di quello di $J \times F \times C$ (infatti F vale -10).
C vale: $1˙000 \times 990 + 1˙000 + 9˙900 = 990˙000 + 10˙900 = 1˙000˙900$.
D vale: $1˙000˙900 \times 1˙000 = 1˙000˙900˙000$
Quando il valore di J si avvicina a quello di D, il valore di $10 \times J \times C$ si avvicina a quello di $10 \times D \times C$.

ESERCIZIO 7

PROBLEM

It is well known that:

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

However, for *some values* of x and y, we indeed have:

$$(x-y)^3 = x^3 - y^3.$$

If we assume $0 \le x \le 1000$, $0 \le y \le 1000$ and both are *integers*, how many different pairs of such (x,y) satisfy the second equality?

Put your answer as an integer in the box below.

SOLUTION

3001

TIPS FOR THE SOLUTION

The suitable pairs are of three types $(0,a)$, $(a,0)$ and (a,a) for every integer a such that $0 \le a \le 1000$. There are 1001 of such a, but there are only 3001 pairs because (0,0) should be counted only once.

ESERCIZIO 8

PROBLEM
In a wide river two equal motor boats (named Upstream and Downstream) are anchored to a pier. At some time, the boats leave the pier simultaneously in the direction according to their names; at the same time a buoy is thrown into the water from the pier.
After exactly 38 minutes, both boats reverse the course.
Starting from the moment they leave the pier, how long does it takes Upstream and Downstream, to cross the buoy?
The two boats sail all the time keeping the engines at full power and turn instantly.
The current of the river is a mile per hour (this is also the speed of the buoy), and the boats in still waters at full power would have the speed of 11 knots (miles per hour).
Put your answers in the table below as integers without leading zeroes.

	hours	minutes
time for Upstream		
time for Downstream		

SOLUTION

	hours	minutes
time for Upstream	1	16
time for Downstream	1	16

TIPS FOR THE SOLUTION
If you imagine to be astride the buoy, everything takes place as in still waters: the two boats move away at the same speed and then return simultaneously.