ESERCIZIO 1

Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, problema ricorrente REGOLE E DEDUZIONI, pagina 2.

PROBLEMA

Sono date le seguenti regole:

regola(1,[p,q],a)	regola(2,[b,x,a],w)	regola(3,[h],c)
regola(4,[a,n,q],v)	regola(5,[a],h)	regola(6,[q],p)
regola(7,[a,b,c],y)	regola(8,[p,q,a],n)	regola(9,[a,w],b)
regola(10,[a,x],w)	regola(11,[x,y],a)	regola(12,[d,w],a)

Trovare:

1. la lista L1 che descrive il procedimento per dedurre **w** conoscendo **x** e **y**;
2. la lista L2 che descrive il procedimento per dedurre **y** conoscendo **d** e **w**;
3. la lista L3 che descrive il procedimento per dedurre **v** conoscendo **q**.

L1	[ ]
L2	[ ]
L3	[ ]

SOLUZIONE

L1	[11,10]
L2	[12,5,3,9,7]
L3	[6,1,8,4]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per la prima domanda, si osservi che **w** è deducibile con la regola 2 che ha come antecedenti **b**, **x** ed **a** e con la regola 10 che ha come antecedenti **a** e **x**: quindi sembra preferibile usare quest'ultima. La regola 11 permette di dedurre **a** dai dati, quindi il procedimento è [11,10].

Per la seconda domanda, **y** è deducibile solo con la regola 7 che ha come antecedenti **a**, **b** e **c** (tutti incogniti). A partire dai dati (**d** e **w**), è possibile applicare solo la regola 12 per dedurre **a**, conoscendo il quale si può applicare la regola 9, per dedurre **b**, e la regola 5 per dedurre **h**; successivamente con la regola 3 si può dedurre **c**. Il procedimento è quindi [12,5,3,9,7], nel rispetto delle regole di scrittura della lista che rappresenta il procedimento.

Per la terza domanda, **v** è deducibile solo con la regola 4, che ha come antecedenti **a**, **n** (incogniti) e **q** (dato). Conviene ancora cercare le regole applicabili a partire dai soli dati: in questo caso la regola 6, che, da **q**, permette di dedurre **p**; successivamente, noti **q** e **p**, con la regola 1 si deduce anche **a**. A questo puntosi può applicare la regola 8 e dedurre **n**: questo consente di applicare la regola 4. Il procedimento è quindi [6,1,8,4].

ESERCIZIO 2
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, problema ricorrente PERCORSI IN UN GRAFO, pagina 6.

PROBLEMA
È dato un grafo descritto dal seguente elenco di archi:

a(n6,n2,7)	a(n3,n5,6)	a(n1,n6,5)
a(n6,n4,1)	a(n5,n2,2)	a(n7,n1,8)
a(n4,n2,7)	a(n1,n4,6)	a(n2,n8,3)
a(n6,n7,2)	a(n6,n3,4)	a(n3,n7,3)

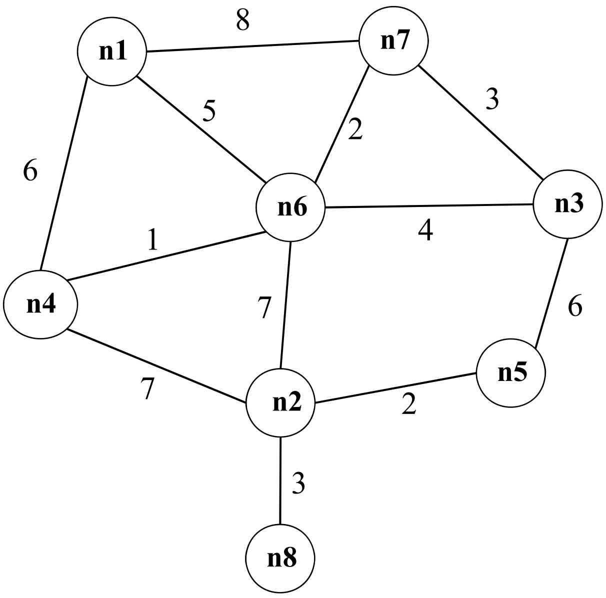
Disegnare il grafo e trovare:
1. la lista L1 del percorso più breve tra n1 e n5;
2. la lista L2 del percorso semplice più lungo tra n1 e n5 che passa per 7 nodi;
3. la lista L3 del percorso semplice più lungo tra n1 e n5 che passa per 4 nodi;
4. il numero N di percorsi che hanno lunghezza 15.

L1	[ ]
L2	[ ]
L3	[ ]
N	

SOLUZIONE

L1	[n1,n6,n2,n5]
L2	[n1,n4,n2,n6,n7,n3,n5]
L3	[n1,n7,n3,n5]
N	3

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Un possibile *layout* del grafo è mostrato nella seguente figura.



N.B. Il grafo è planare, cioè è possibile disegnarlo su un piano senza che gli archi si incrocino. Le lunghezze associate agli archi (che, per esempio, rappresentano delle strade) non sono legate alle reali lunghezze dei segmenti che li rappresentano nel grafo.

I percorsi semplici tra n1 e n5 sono i 16 elencati di seguito.

PERCORSO	LUNGHEZZA	
[n1, n6, n2, n5]	14	4 nodi più breve
[n1, n6, n4, n2, n5]	15	
[n1, n6, n7, n3, n5]	16	
[n1, n6, n3, n5]	15	4 nodi
[n1, n4, n2, n6, n7, n3, n5]	31	7 nodi più lungo
[n1, n4, n2, n6, n3, n5]	30	
[n1, n4, n2, n5]	15	4 nodi
[n1, n4, n6, n2, n5]	16	
[n1, n4, n6, n7, n3, n5]	18	
[n1, n4, n6, n3, n5]	17	
[n1, n7, n6, n2, n5]	19	
[n1, n7, n6, n4, n2, n5]	20	
[n1, n7, n6, n3, n5]	20	
[n1, n7, n3, n5]	17	4 nodi più lungo
[n1, n7, n3, n6, n2, n5]	24	
[n1, n7, n3, n6, n4, n2, n5]	25	7 nodi

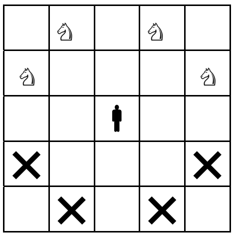
N.B. Questi percorsi possono essere facilmente “organizzati” in un albero; la radice è il nodo di partenza, n1; ogni nodo dell’albero ha tanti figli quanti sono i nodi a lui adiacenti nel grafo, purché non compaiono già nell’albero come suoi antenati: per esempio i nodi figli della radice sono n7 e n4; le foglie sono il nodo finale n5 o altri nodi che non hanno figli perché tutti i nodi adiacenti (nel grafo) compaiono già tra i loro antenati (nell’albero); i percorsi sono i “rami” che dalla radice dell’albero vanno alle foglie etichettate col nodo finale.

ESERCIZIO 3
Si faccia riferimento al problema ricorrente MOVIMENTO DI PEZZI DEGLI SCHACCHI, pagina 20.

PROBLEMA
In un campo di dimensioni 8×8 un robot si muove come il cavallo nel giuoco degli scacchi; gli sono vietate, però, le mosse nelle direzioni della rosa dei venti comprese nella seguente lista:

[sse,ese,oso,sso],

cioè le mosse del robot in questo problema si riducono a quelle illustrate (col simbolo ♘) nella seguente figura.



Nel campo di gara le caselle della seguente lista sono interdette al robot:

[[3,3],[3,5],[4,2],[4,4],[5,2],[5,3],[5,4],[5,5]]

N.B. Un elemento della lista descrive una casella indicandone le coordinate a partire dallo spigolo in basso a sinistra del campo di gara.
Inoltre, in certe caselle ci sono dei premi che il robot raccoglie passandoci; i premi presenti sono descritti dalla seguente lista:

[[3,6,8],[2,4,10],[4,3,7],[5,6,12]].

N.B. Un elemento della lista ha la forma: [<ascissa>,<ordinata>,<premio>].

Partendo dalla casella [3,1], il robot deve raggiungere la casella [4,8]. Trovare:
1. il numero N di percorsi in cui non si raccolgono premi;
2. la lista del percorso in cui si raccoglie il premio complessivo maggiore;
3. la lista del percorso in cui si raccoglie un premio complessivo pari a 18.

N	
L1	[ ]
L2	[ ]

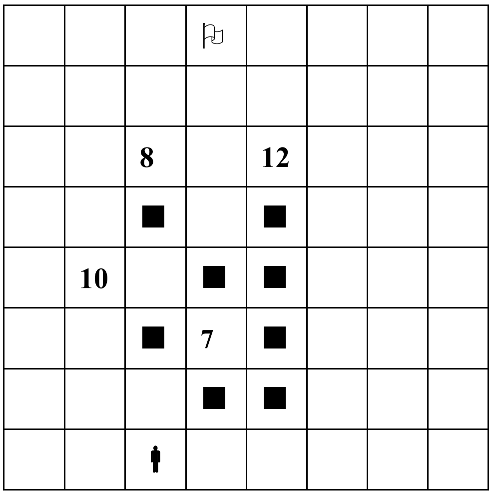
SOLUZIONE

N	1
L1	[[3,1],[4,3],[2,4],[3,6],[4,8]]
L2	[[3,1],[1,2],[2,4],[3,6],[4,8]]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Esiste una maniera sistematica per trattare problemi di questo tipo: costruire l'*albero delle possibili mosse*. Ogni nodo dell'albero è etichettato con le coordinate di una casella; si inizia con la *radice* che è la casella in cui parte il robot; poi ad ogni nodo si aggiungono tanti *figli* quante sono le caselle raggiungibili dal robot posto nella casella corrispondente a quel nodo. Naturalmente il robot non può tornare in una casella in cui è già stato.
I nodi in cui ci si arresta (cioè le foglie dell'albero) sono la *meta* o una casella da cui il robot non si può muovere.

In casi "semplici", come il presente, si possono costruire direttamente tutti i percorsi possibili.

N.B. Il presente caso è “semplice” perché al robot è permesso di muoversi essenzialmente verso l’alto, quindi è facile visualizzarne i percorsi.
Il campo di gara è mostrato nella figura.



Da [3,1] il robot può andare in [4,3], [2,3] e [1,2]; è facile vedere che nel primo e nel secondo caso può raggiungere la meta mediante due percorsi, mentre da [1,2] esiste un solo percorso fino a [4,8].
Ricapitolando i percorsi possibili e i premi complessivi raccolti sono:

PERCORSI	PREMI RACCOLTI
[[3,1],[4,3],[6,4],[5,6],[4,8]]	19
[[3,1],[4,3],[2,4],[3,6],[4,8]]	25
[[3,1],[2,3],[1,5],[2,7],[4,8]]	0
[[3,1],[2,3],[1,5],[3,6],[4,8]]	8
[[3,1],[1,2],[2,4],[3,6],[4,8]]	18

ESERCIZIO 4
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO, pagina 23.

PROBLEMA
Si consideri la seguente procedura ALFA.

```
procedure ALFA;
variables B, M, K, J integer;
B ← 0;
for K from 1 to 3 step 1 do;
        M ← 0;
        for J from 1 to 4 step 1 do;
                M ← K × (J + M);
        endfor;
        B ← M+ B;
endfor;
output M, B;
endprocedure;
```

Determinare i valori di output.

M	
B	

SOLUZIONE

M	174
B	236

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
La seguente tabella mostra i valori assunti da M e B durante i vari passi della procedura

	valore	
	M	B
B ← 0;	indefinito	0
inizio prima esecuzione "for" esterno con K che vale 1	indefinito	0
M ← 0;	0	0
esecuzione "for" interno (valori successivi di M: 1, 3, 6, 10)	10	0
B ← M+ B;	10	10
inizio seconda esecuzione "for" esterno con K che vale 2	10	10
M ← 0;	0	10
esecuzione for interno (valori successivi di M: 2, 8, 22, 52)	52	10
B ← M+ B;	52	62
inizio seconda esecuzione "for" esterno con K che vale 3	52	62
M ← 0;	0	62
esecuzione for interno (valori successivi di M: 3, 15, 54, 174)	174	62
B ← M+ B;	174	236

ESERCIZIO 5
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO, pagina 23.

PROBLEMA
Si consideri la seguente procedura BETA.

```
procedure BETA;
variables A, B, C, J integer;
for J from 1 to 2 step 1 do
        input A, B, C;
        if A < B then A ← B;
                  else C ← B;
        endif;
output J, A, B, C;
endfor;
endprocedure;
```

La prima terna di valori di input per A, B, C è (nell'ordine) [5,4,9]; la seconda è [7,9,8]. Trovare i valori di output nell'ordine in cui sono prodotti dalla procedura.

J	1	2
A		
B		
C		

SOLUZIONE

J	1	2
A	5	9
B	4	9
C	4	8

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
I valori richiesti seguono immediatamente dalla lettura della procedura.

ESERCIZIO 6
Si faccia riferimento all'Allegato A - OPS 2016, ELEMENTI DI PSEUDOLINGUAGGIO, pagina 23.

PROBLEMA
Si consideri la seguente procedura GAMMA.

```
procedure GAMMA;
variables A, N, M, J integer;
for J from 1 to 2 step 1 do;
        A ← 1;
        M ← 0;
        input N;
        while A < 1000 do;
                A ← A × N;
                M ← M + 1;
        endwhile;
output A, M;
endfor;
endprocedure;
```

I valori di input per N sono 2 e 3. Trovare i valori di output.

J	N	A	M
1	2		
2	3		

SOLUZIONE

J	N	A	M
1	2	1024	10
2	3	2187	7

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
La procedura calcola le potenze successive (del valore) di N, smettendo quando superano 1000. Quando il valore di N è 2, la prima potenza di 2 superiore a 1000 è la decima (1024), quindi A vale 1024 e M vale 10; quando il valore di N è 3, la prima potenza superiore a 1000 è la settima (2187), quindi A vale 2187 e M vale 7.

ESERCIZIO 7

PROBLEM

It is easy to check that $x = 0$ e $y = 1$ satisfies the following inequality:

$$x^2 + y^2 \leq 6.$$

You can say that the list, or *pair*, [0,1] is an *integer solution* of the above inequality because if the first element of the list is given as value to x and the second element is given as value to y, then the inequality is satisfied. Note that also the list [0,-1] is an integer solution.

Find the number of integer solutions of the given inequality; put this number in the box below.

SOLUTION

21

TIPS FOR THE SOLUTION

To count the solutions, we may decompose the problem into 7 disjoint cases:

$$x^2 + y^2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Indeed, the sum of two squares of integer numbers has an integer value that cannot be negative, so the inequality is *equivalent* to the six equations: this means that each solution of an equation is also a solution of the inequality.

equation	solutions
$x^2 + y^2 = 0$	[0,0]
$x^2 + y^2 = 1$	[0,1], [0,-1], [1,0], [-1,0]
$x^2 + y^2 = 2$	[1,1], [1,-1], [-1,1], [-1,-1]
$x^2 + y^2 = 3$	no *integer* solution
$x^2 + y^2 = 4$	[0,2], [0,-2], [2,0], [-2,0]
$x^2 + y^2 = 5$	[1,2], [1,-2], [2,1], [2,-1], [-1,2], [-1,-2], [-2,1], [-2,-1]
$x^2 + y^2 = 6$	no *integer* solution

Hence, in total, the solutions are $1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 + 0 = 21$.

ESERCIZIO 8

PROBLEM

A boss, in charge of ten workers, was ordered to go to a construction site 65 miles distant. The only transportation available was a car, which could carry only 5 men besides the driver. The boss decided to carry the men to their destination in two loads. As he left with the first party of five, he ordered the remaining five to start hiking along the road. He unloaded the first party some distance from the destination, with orders to hike the rest of the way. Then he returned until he met the five, picked them up and drove to the destination. Whether by accident or design (opinions differ) the car (with the second party and the boss) and the first party arrived at the destination the same moment.
The men walked at a uniform speed of four miles per hour, while the car averaged 40 miles per hour. How much time was saved by the hiking? Put your answer, in hours and minutes in the cases below.
N.B. Your answers should be integers without leading zeroes (for example 3 not 03).

hours	minutes

SOLUTION

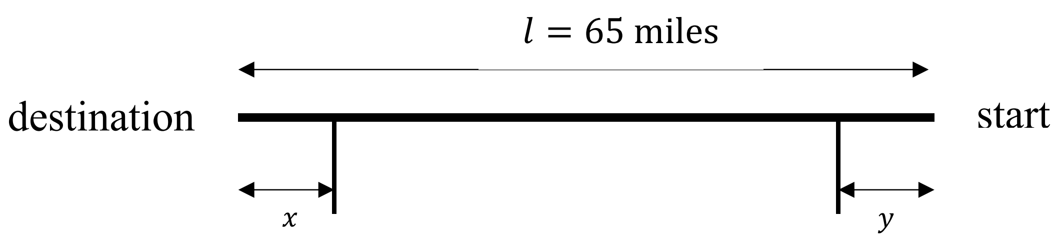
hours	minutes
1	0

TIPS FOR THE SOLUTION

By jeep alone the transport would have required the car to go for 65 miles to the destination point with the first load, then go back to pick up the second load and reach again the destination point: that is a total of 65×3 miles, covered in

$$\frac{65 \times 3}{40} = 4{,}875 \text{ hours.}$$

A picture will help to evaluate the impact of hiking.



Let's call x the distance from the place, where the first party was dropped, to the destination, and y the distance from the start to the place where the second party was picked up.
The first party took

$$t_1 = \frac{l - x}{40} + \frac{x}{4} = \frac{l + 9x}{40} \text{ hours}$$

to arrive; the second party took

$$t_2 = \frac{y}{4} + \frac{l - y}{40} = \frac{l + 9y}{40} \text{ hours}$$

to arrive, and the boss took

$$t_s = \frac{l - x}{40} + \frac{l - x - y}{40} + \frac{l - y}{40} = \frac{3l - 2x - 2y}{40} \text{ hours.}$$

They arrived at the same time: from $t_1 = t_2$ it is easy to see that $x = y$.
Then, after the substitution of x by y in t_s, from $t_2 = t_s$ we get

$$\frac{3l - 2y - 2y}{40} = \frac{l + 9y}{40}$$
$$2l = 13y.$$

Hence, because l is 65 miles, it follows that $y = x = 10$, and t_1 or t_2 or t_s are equal to $(65 + 90)/40 = 3{,}875$.
Therefore, the hiking saved exactly one hour.