

ESERCIZIO 1

PREMESSA

Per risolvere problemi spesso esistono delle regole che, dai dati del problema, permettono di calcolare o *dedurre* la soluzione. Questa situazione si può descrivere col termine

regola(<sigla>,<lista antecedenti>,<conseguente>)

che indica una regola di nome <sigla> che consente di dedurre <conseguente> conoscendo tutti gli elementi contenuti nella <lista antecedenti>, detta anche *premessa*. Problemi “facili” possono essere risolti con una sola regola; per problemi “difficili” una sola regola non basta a risolverli, ma occorre applicarne diverse in successione.

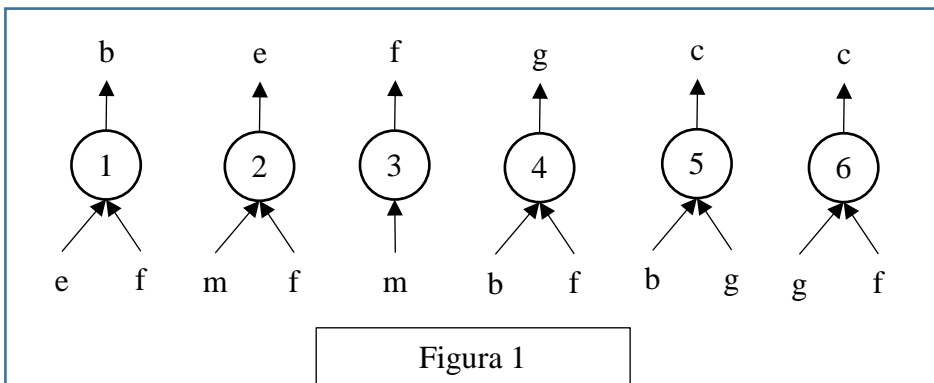
Si considerino le seguenti regole:

regola(1,[e,f],b)      regola(2,[m,f],e)      regola(3,[m],f)  
 regola(4,[b,f],g)      regola(5,[b,g],c)      regola(6,[g,f],c)

Per esempio la regola 1 dice che si può calcolare (o dedurre) **b** conoscendo **e** ed **f** (cioè gli elementi della lista [e,f]); conoscendo **b** ed **f** (cioè gli elementi della lista [b,f]) è possibile dedurre **g** con la regola 4. Quindi, a partire da **e** ed **f** è possibile dedurre prima **b** (con la regola 1) e poi **g** (con la regola 4).

Un *procedimento di deduzione* (o deduttivo, o di calcolo) è rappresentato da un *insieme di regole da applicare in sequenza opportuna* per dedurre un certo elemento (incognito) a partire da certi dati: quindi può essere descritto dalla lista delle sigle di queste regole. Il procedimento [1,4] descrive la soluzione del problema: “dedurre **g** a partire da **e** ed **f**”.

Una maniera grafica per rappresentare le regole è quella mostrata nella seguente figura 1: consiste nell’associare un albero (rovesciato) ad ogni regola: la radice (in alto) è il conseguente, le foglie (in basso) sono gli antecedenti.

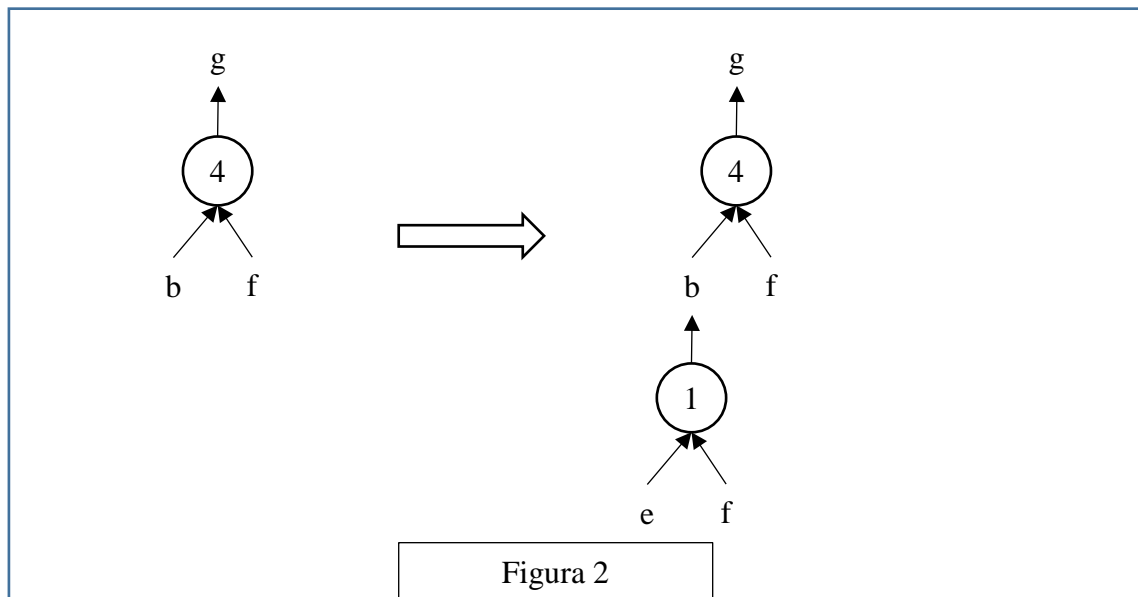


Con questa rappresentazione grafica, risolvere il problema “dedurre **g** a partire da **e** ed **f**” è particolarmente facile; si cerca un “albero” (cioè una regola) che ha come radice l’incognita (cioè **g**): in questo caso ne esiste solo uno che è la regola 4: si veda la figura 2 a sinistra.

Le foglie di questo albero (**b** ed **f**) *non* sono tutte note: quelle note (**f** in questo caso) sono vere e proprie foglie, quelle incognite (**b** in questo caso) vanno considerati come “anelli” a cui “appendere” un altro albero; quindi bisogna continuare *sviluppando* la foglia incognita **b**, cioè “appendendo” a **b** l’albero rappresentato dalla regola 1, come illustrato nella figura 2 a destra.

Adesso tutte le foglie dell’albero così ottenuto (**e** ed **f**) sono note e il problema è risolto.

Si può anche dire che un albero le cui foglie sono tutte note rappresenta un procedimento per dedurre la “radice” a partire dalle “foglie”. Per costruire la lista corrispondente occorre *partire dal basso*: prima si applica la regola 1, che utilizza solo i dati; poi si può applicare la regola 4. Il procedimento è quindi (individuato dalla lista) [1,4].

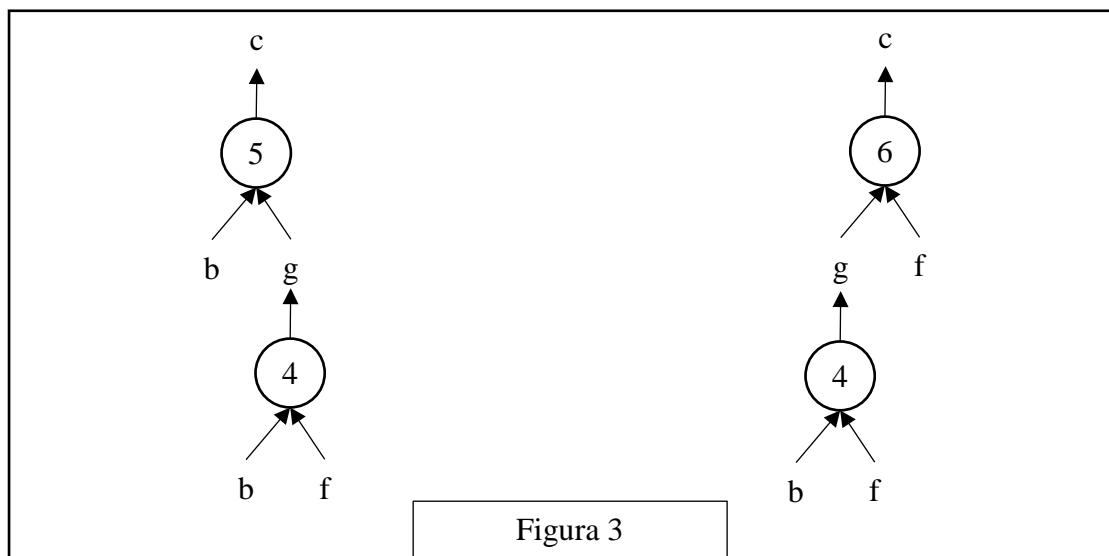


N.B. Nella lista non ci sono regole *ripetute*: infatti un procedimento di deduzione è un *insieme* di regole da applicare in opportuna sequenza. L'applicazione di una regola rende disponibile il conseguente da utilizzare (come antecedente) nell'applicazione di regole successive.

Nelle liste richieste le sigle delle regole sono elencate nell'ordine che corrisponde alla sequenza di applicazione: la prima (a sinistra) della lista deve essere la sigla che corrisponde alla prima regola da applicare (che ha come antecedenti solo dati); l'ultima (a destra) deve essere la sigla della regola che ha come conseguente l'elemento incognito da dedurre.

Per rendere unica la lista associata a un ben preciso procedimento (cioè a un ben preciso insieme di regole), si costruisce tale lista per passi successivi a partire dal primo elemento che è la sigla della prima regola da applicare; ad ogni passo, se ci fossero più regole applicabili, *per quel procedimento*, occorre dare la precedenza (nella lista) alla regola con sigla *inferiore*.

N.B. In alcuni casi esistono più procedimenti deduttivi possibili che permettono di ricavare un certo elemento dagli stessi dati in maniere diverse (cioè con *insiemi diversi di regole* e quindi con alberi diversi). Per esempio il problema “dedurre **c** a partire da **b** ed **f**” (dalle regole viste sopra) ha due distinti procedimenti risolutivi; gli alberi relativi ai due procedimenti sono mostrati nella seguente figura 3



Le liste associate sono, rispettivamente, [4,5] e [4,6].

In un procedimento deduttivo, il numero di regole *differenti* coinvolte (e, quindi, anche il numero di elementi della lista corrispondente al procedimento) si dice *lunghezza* del procedimento.

#### PROBLEMA

Sono date le seguenti regole:

regola(1,[g,n,m],k)	regola(2,[a,b],e)	regola(3,[t,u],v)
regola(4,[a],d)	regola(5,[t],u)	regola(6,[a,f,g],m)
regola(7,[b,g],t)	regola(8,[k],x)	regola(9,[f,g],n)
regola(10,[d,e],x)	regola(11,[a],f)	regola(12,[t,u,v],x)

Trovare:

1. la lista L1 che descrive il procedimento per dedurre **x** a partire da **a** e **b**;
2. la lista L2 che descrive il procedimento per dedurre **x** a partire da **b** e **g**;
3. la lista L3 che descrive il procedimento per dedurre **x** a partire da **a** e **g**.

N.B. Elencare le sigle nell'ordine che corrisponde alla sequenza di applicazione delle regole a partire dal primo elemento (a sinistra) della lista: se ci sono contemporaneamente più regole applicabili, dare la precedenza a quella con sigla inferiore.

L1	
L2	
L3	

#### SOLUZIONE

L1	[2,4,10]
L2	[7,5,3,12]
L3	[11,6,9,1,8]

#### COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per risolvere questo tipo di problemi si possono usare due metodi: il metodo *backward* (o *top down*) oppure il metodo *forward* (o *bottom up*).

Il primo metodo consiste nel partire dalla incognita e cercare di individuare una regola per derivarla. Se esiste una regola i cui antecedenti sono tutti noti (i dati) la soluzione è trovata; altrimenti si cerca una regola i cui antecedenti non sono tutti noti e si continua a cercare regole per derivare gli antecedenti incogniti (che compaiono nella premessa).

Il secondo metodo consiste nel partire dagli *elementi noti* (che, all’inizio, sono solo i dati) e cercare una regola che nella premessa contenga solo tali elementi: se il conseguente è l’incognita cercata, allora il problema è risolto, altrimenti si aggiunge il conseguente agli elementi noti: con questi si ripete il processo, proseguendo finché si trova una regola il cui conseguente è l’incognita.

Quale dei due metodi è più conveniente dipende dal problema: di norma per problemi con “molte” regole e con l’incognita che compare come conseguente in “poche” conviene provare il primo metodo; per problemi con “poche” regole e con l’incognita che compare come conseguente in “molte” conviene provare con il secondo. In casi veramente complessi si possono provare entrambi i metodi, per orientarsi a trovare il processo risolutivo. Queste considerazioni valgono se la soluzione è cercata “manualmente”: dovendo scrivere un programma è quasi sempre conveniente il primo metodo.

La principale difficoltà dell’esercizio consiste nello stabilire quale delle tre regole per dedurre  $x$  (la 8 che ha come antecedente  $k$ , la 10 che ha come antecedenti  $d$  ed  $e$ , e la 12 che ha come antecedenti  $t$ ,  $u$  e  $v$ ) si deve usare nelle tre domande.

Per la prima domanda è facile vedere che dai dati, con la regola 2 si deduce  $e$ , con la regola 4 si deduce  $d$ , quindi si può usare la regola 10 per dedurre  $x$ ; il procedimento è [2,4,10].

Analogamente per la seconda domanda, si vede subito che dai dati si può dedurre  $t$  con la regola 7: ci si orienta quindi ad applicare la regola 12; infatti con la regola 5 si può dedurre  $u$  e quindi con la regola 3 si deduce  $v$ . L’intero procedimento è [7,5,3,12].

Per la terza domanda si vede subito che è inutile applicare la regola 4 per dedurre  $d$  in vista di riutilizzare la regola 10 per dedurre  $x$ : infatti  $e$  è deducibile solo con la regola 2, ma  $b$  (che compare come antecedente) non è dato e non è deducibile. Si può tentare di usare la regola 8 (per  $x$ ) e quindi cercare di dedurre  $k$ . Applicando in successione le regole 11, 6 e 9 si riesce a dedurre  $f$ ,  $m$  ed  $n$  che, a loro volta, permettono di dedurre  $k$  con la regola 1. Il procedimento completo è [11,6,9,1,8].

ESERCIZIO 2

PREMESSA

In un foglio a quadretti è disegnato un campo di gara di dimensioni 14×5 (14 quadretti in orizzontale e 5 in verticale, vedi figura).

		Q												
		5	■	■		■			S					
			7	P										
■	■	3												
♠		■												

Ogni casella può essere individuata da due numeri (interi); per esempio la casella contenente la lettera P è individuata spostandosi di cinque colonne da sinistra e di tre righe dal basso: brevemente si dice che ha *coordinate* [5,3]; la prima coordinata (in questo caso 5) si dice *ascissa* e la seconda (in questo caso 3) si dice *ordinata*. Le coordinate della casella contenente la lettera S sono [10,4] e di quella contenente il robot ♠ sono [1,1].

Il robot si muove a passi e ad ogni passo (o mossa) può spostarsi solo in una delle caselle contenenti ♞ come illustrato nella seguente figura (allo stesso modo del *cavallo* nel gioco degli scacchi).

	♞		♞	
♞				♞
		♠		
♞				♞
	♞		♞	

Il campo di gara può contenere caselle, segnate da un *quadrato nero* nella prima figura, *interdette* al robot: cioè il robot *non può essere collocato* in quelle caselle (che quindi si comportano come se fossero occupate da un pezzo dello stesso colore del cavallo, nel gioco degli scacchi); quindi, tenuto conto anche dei bordi del campo di gara, la mobilità del robot può essere limitata; ad esempio se il robot si trovasse nella casella in cui c'è Q si potrebbe spostare solo in 3 caselle: non può andare in [5,4] perché è interdetta; se fosse nella casella in cui c'è P avrebbe 7 mosse possibili; dalla casella [1,1] ha solo 2 mosse possibili: in [2,3] e in [3,2].

Un percorso è descritto dalla *lista delle coordinate delle caselle attraversate*; un possibile percorso da P (coordinate [5,3]) a Q (coordinate [3,5]) è descritto dalla lista [[5,3],[3,2],[5,1],[4,3],[3,5]].

In alcune caselle sono posti dei premi che il robot può *raccogliere* lungo un percorso. Ogni premio è descritto fornendo le coordinate della casella che lo contiene e il valore del premio; i premi riportati nella prima figura sono descritti dalla seguente lista [[3,2,3],[4,3,7],[3,4,5]]. Nel percorso da P a Q, sopra descritto, il *totale di premi raccolti* è pari a 10.

PROBLEMA

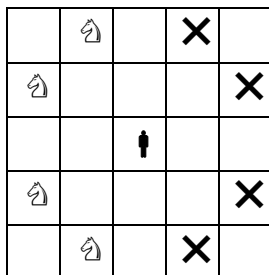
Un campo di gara ha dimensioni 9×9; le caselle interdette sono descritte dalla seguente lista:

[[2,5],[3,1],[3,5],[4,4],[4,5],[4,8],[5,2],[5,3],[5,4],[5,5],[7,4],[7,5];

i premi sono descritti dalla seguente lista:

[[3,2,5],[4,6,10],[6,5,11],[6,3,12],[7,2,13]].

Al robot sono vietati i movimenti corrispondenti alle direzioni della rosa dei venti indicate nella seguente lista [nne,ene,ese,sse], cioè le mosse del robot in questo problema si riducono a quelle illustrate (col simbolo  $\hat{a}$ ) nella seguente figura.



Partendo dalla casella [9,4], il robot deve raggiungere la casella [1,2], senza passare più di una volta per una stessa casella. Trovare:

- il percorso semplice L1 in cui si raccoglie il massimo di premi;
- il percorso semplice L2 in cui si raccoglie il minimo di premi;
- il numero N di percorsi possibili da [9,4] a [1,2].

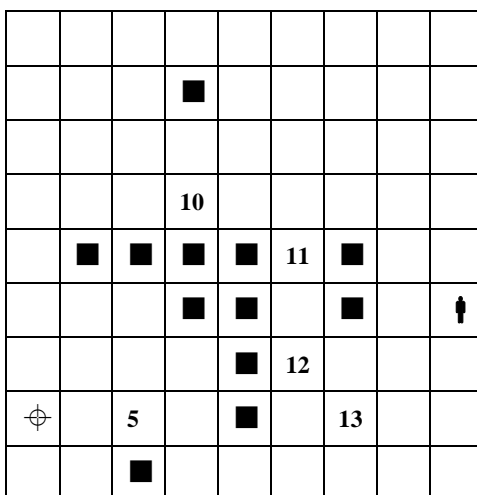
L1	
L2	
N	

SOLUZIONE

L1	[[9,4],[8,2],[6,3],[5,1],[3,2],[2,4],[1,2]]
L2	[[9,4],[8,6],[7,8],[5,7],[3,6],[2,4],[1,2]]
N	5

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Il campo di gara è mostrato nella figura.



Esiste una maniera sistematica per trattare problemi di questo tipo: costruire l'albero delle possibili mosse: si inizia con la radice che è la casella in cui parte il robot; poi ad ogni nodo si aggiungono tanti figli quante sono le caselle raggiungibili dal robot posto nella casella corrispondente a quel nodo. Naturalmente il robot non può tornare in una casella in cui è già stato (anche se ciò fosse con-



sentito dalle mosse permesse). Un ramo si arresta quando giunge alla meta o non può più essere sviluppato: sono così evidenti i percorsi utili alla soluzione del problema.

La costruzione e l'esame dell'albero delle possibili mosse viene "sempre" attuata quando si impiega un programma per risolvere il problema.

In casi particolari, come il presente, se non si usa un programma, si può procedere per via euristica (e non esaminare formalmente "tutte" le mosse).

N.B. Spesso è utile la seguente considerazione: se il cavallo è in una casa di coordinate  $[x,y]$  e va in una casa di coordinate  $[z,t]$ , allora la somma delle coordinate  $x+y$  ha *parità* diversa da  $z+t$  (cioè se la prima somma è pari la seconda è dispari, e viceversa).

Il robot ha 3 possibilità per la prima mossa:  $[8,6]$ ,  $[7,3]$ ,  $[8,2]$ .

Tenuto conto dei vincoli (mosse vietate e caselle interdette), i percorsi possibili da  $[9,4]$  a  $[1,2]$  sono:

$[[9,4],[8,2],[6,3],[5,1],[3,2],[2,4],[1,2]]$	premi raccolti	17
$[[9,4],[8,2],[6,3],[5,1],[4,3],[2,4],[1,2]]$	"	12
$[[9,4],[7,3],[6,5],[5,7],[3,6],[2,4],[1,2]]$	"	11
$[[9,4],[8,6],[6,5],[5,7],[3,6],[2,4],[1,2]]$	"	11
$[[9,4],[8,6],[7,8],[5,7],[3,6],[2,4],[1,2]]$	"	0

### ESERCIZIO 3

#### PREMESSA

In un deposito di minerali esistono esemplari di vario peso e valore individuati da sigle di riconoscimento. Ciascun minerale è descritto da una termine che contiene le seguenti informazioni:

minerale(<sigla del minerale>, <valore in euro>, <peso in Kg>).

Il deposito contiene i seguenti minerali:

minerale(m1,59,89)	minerale(m2,53,86)	minerale(m3,58,83)
minerale(m4,56,85)	minerale(m5,54,82)	minerale(m6,55,84)
minerale(m7,57,87)	minerale(m8,59,88)	minerale(m9,52,89)

#### PROBLEMA

- Disponendo di un carrello con portata massima di 167 Kg, trovare la lista L1 delle sigle di 2 minerali (diversi) trasportabili con questo mezzo cui corrisponde il massimo valore complessivo possibile.
- Disponendo di un carrello con portata massima di 255 Kg, trovare la lista L2 delle sigle di 3 minerali (diversi) trasportabili con questo mezzo cui corrisponde il massimo valore complessivo possibile.
- Disponendo di un carrello con portata massima di 345 Kg, trovare il massimo valore V complessivo trasportabile (naturalmente composto di minerali diversi).

N.B. Nelle liste, elencare le sigle in ordine crescente; per le sigle si ha il seguente ordine:  $m1 < m2 < \dots < m9$ .

L1	
L2	
L3	

#### SOLUZIONE

L1	[m3,m6]
L2	[m3,m6,m8]
V	232

#### COMMENTI ALLA SOLUZIONE

In generale, un metodo per risolvere il problema (detto della *forza bruta*) è quello di generare tutte le combinazioni di 2, di 3 e di 4 minerali presi tra i nove del deposito, calcolarne peso e valore e scegliere, tra quelle trasportabili, quella che ha valore maggiore; le combinazioni, sotto forma di liste, sono le seguenti.

N.B. Di seguito a ciascuna combinazione, è indicato il valore e il peso complessivi.

[m1,m2]	[112,175]	[m2,m3]	[111,169]	[m3,m5]	[112,165]
[m1,m3]	[117,172]	[m2,m4]	[109,171]	[m3,m6]	[113,167]
[m1,m4]	[115,174]	[m2,m5]	[107,168]	[m3,m7]	[115,170]
[m1,m5]	[113,171]	[m2,m6]	[108,170]	[m3,m8]	[117,171]
[m1,m6]	[114,173]	[m2,m7]	[110,173]	[m3,m9]	[110,172]
[m1,m7]	[116,176]	[m2,m8]	[112,174]	[m4,m5]	[110,167]
[m1,m8]	[118,177]	[m2,m9]	[105,175]	[m4,m6]	[111,169]
[m1,m9]	[111,178]	[m3,m4]	[114,168]	[m4,m7]	[113,172]





[m4,m8]	[115,173]	[m5,m8]	[113,170]	[m6,m9]	[107,173]
[m4,m9]	[108,174]	[m5,m9]	[106,171]	[m7,m8]	[116,175]
[m5,m6]	[109,166]	[m6,m7]	[112,171]	[m7,m9]	[109,176]
[m5,m7]	[111,169]	[m6,m8]	[114,172]	[m8,m9]	[111,177]

Soluzione per la prima domanda: [m3,m6]

[m1,m2,m3][170,258]	[m2,m3,m4][167,254]	[m3,m5,m8][171,253]
[m1,m2,m4][168,260]	[m2,m3,m5][165,251]	[m3,m5,m9][164,254]
[m1,m2,m5][166,257]	[m2,m3,m6][166,253]	[m3,m6,m7][170,254]
[m1,m2,m6][167,259]	[m2,m3,m7][168,256]	[m3,m6,m8][172,255]
[m1,m2,m7][169,262]	[m2,m3,m8][170,257]	[m3,m6,m9][165,256]
[m1,m2,m8][171,263]	[m2,m3,m9][163,258]	[m3,m7,m8][174,258]
[m1,m2,m9][164,264]	[m2,m4,m5][163,253]	[m3,m7,m9][167,259]
[m1,m3,m4][173,257]	[m2,m4,m6][164,255]	[m3,m8,m9][169,260]
[m1,m3,m5][171,254]	[m2,m4,m7][166,258]	[m4,m5,m6][165,251]
[m1,m3,m6][172,256]	[m2,m4,m8][168,259]	[m4,m5,m7][167,254]
[m1,m3,m7][174,259]	[m2,m4,m9][161,260]	[m4,m5,m8][169,255]
[m1,m3,m8][176,260]	[m2,m5,m6][162,252]	[m4,m5,m9][162,256]
[m1,m3,m9][169,261]	[m2,m5,m7][164,255]	[m4,m6,m7][168,256]
[m1,m4,m5][169,256]	[m2,m5,m8][166,256]	[m4,m6,m8][170,257]
[m1,m4,m6][170,258]	[m2,m5,m9][159,257]	[m4,m6,m9][163,258]
[m1,m4,m7][172,261]	[m2,m6,m7][165,257]	[m4,m7,m8][172,260]
[m1,m4,m8][174,262]	[m2,m6,m8][167,258]	[m4,m7,m9][165,261]
[m1,m4,m9][167,263]	[m2,m6,m9][160,259]	[m4,m8,m9][167,262]
[m1,m5,m6][168,255]	[m2,m7,m8][169,261]	[m5,m6,m7][166,253]
[m1,m5,m7][170,258]	[m2,m7,m9][162,262]	[m5,m6,m8][168,254]
[m1,m5,m8][172,259]	[m2,m8,m9][164,263]	[m5,m6,m9][161,255]
[m1,m5,m9][165,260]	[m3,m4,m5][168,250]	[m5,m7,m8][170,257]
[m1,m6,m7][171,260]	[m3,m4,m6][169,252]	[m5,m7,m9][163,258]
[m1,m6,m8][173,261]	[m3,m4,m7][171,255]	[m5,m8,m9][165,259]
[m1,m6,m9][166,262]	[m3,m4,m8][173,256]	[m6,m7,m8][171,259]
[m1,m7,m8][175,264]	[m3,m4,m9][166,257]	[m6,m7,m9][164,260]
[m1,m7,m9][168,265]	[m3,m5,m6][167,249]	[m6,m8,m9][166,261]
[m1,m8,m9][170,266]	[m3,m5,m7][169,252]	[m7,m8,m9][168,264]

Soluzione per la seconda domanda: [m3,m6,m8]

[m1,m2,m3,m4][226,343]	[m1,m2,m4,m9][220,349]	[m1,m2,m8,m9][223,352]
[m1,m2,m3,m5][224,340]	[m1,m2,m5,m6][221,341]	[m1,m3,m4,m5][227,339]
[m1,m2,m3,m6][225,342]	[m1,m2,m5,m7][223,344]	[m1,m3,m4,m6][228,341]
[m1,m2,m3,m7][227,345]	[m1,m2,m5,m8][225,345]	[m1,m3,m4,m7][230,344]
[m1,m2,m3,m8][229,346]	[m1,m2,m5,m9][218,346]	[m1,m3,m4,m8][232,345]
[m1,m2,m3,m9][222,347]	[m1,m2,m6,m7][224,346]	[m1,m3,m4,m9][225,346]
[m1,m2,m4,m5][222,342]	[m1,m2,m6,m8][226,347]	[m1,m3,m5,m6][226,338]
[m1,m2,m4,m6][223,344]	[m1,m2,m6,m9][219,348]	[m1,m3,m5,m7][228,341]
[m1,m2,m4,m7][225,347]	[m1,m2,m7,m8][228,350]	[m1,m3,m5,m8][230,342]
[m1,m2,m4,m8][227,348]	[m1,m2,m7,m9][221,351]	[m1,m3,m5,m9][223,343]



[m1,m3,m6,m7][229,343]	[m2,m3,m5,m7][222,338]	[m3,m4,m5,m9][220,339]
[m1,m3,m6,m8][231,344]	[m2,m3,m5,m8][224,339]	[m3,m4,m6,m7][226,339]
[m1,m3,m6,m9][224,345]	[m2,m3,m5,m9][217,340]	[m3,m4,m6,m8][228,340]
[m1,m3,m7,m8][233,347]	[m2,m3,m6,m7][223,340]	[m3,m4,m6,m9][221,341]
[m1,m3,m7,m9][226,348]	[m2,m3,m6,m8][225,341]	[m3,m4,m7,m8][230,343]
[m1,m3,m8,m9][228,349]	[m2,m3,m6,m9][218,342]	[m3,m4,m7,m9][223,344]
[m1,m4,m5,m6][224,340]	[m2,m3,m7,m8][227,344]	[m3,m4,m8,m9][225,345]
[m1,m4,m5,m7][226,343]	[m2,m3,m7,m9][220,345]	[m3,m5,m6,m7][224,336]
[m1,m4,m5,m8][228,344]	[m2,m3,m8,m9][222,346]	[m3,m5,m6,m8][226,337]
[m1,m4,m5,m9][221,345]	[m2,m4,m5,m6][218,337]	[m3,m5,m6,m9][219,338]
[m1,m4,m6,m7][227,345]	[m2,m4,m5,m7][220,340]	[m3,m5,m7,m8][228,340]
[m1,m4,m6,m8][229,346]	[m2,m4,m5,m8][222,341]	[m3,m5,m7,m9][221,341]
[m1,m4,m6,m9][222,347]	[m2,m4,m5,m9][215,342]	[m3,m5,m8,m9][223,342]
[m1,m4,m7,m8][231,349]	[m2,m4,m6,m7][221,342]	[m3,m6,m7,m8][229,342]
[m1,m4,m7,m9][224,350]	[m2,m4,m6,m8][223,343]	[m3,m6,m7,m9][222,343]
[m1,m4,m8,m9][226,351]	[m2,m4,m6,m9][216,344]	[m3,m6,m8,m9][224,344]
[m1,m5,m6,m7][225,342]	[m2,m4,m7,m8][225,346]	[m3,m7,m8,m9][226,347]
[m1,m5,m6,m8][227,343]	[m2,m4,m7,m9][218,347]	[m4,m5,m6,m7][222,338]
[m1,m5,m6,m9][220,344]	[m2,m4,m8,m9][220,348]	[m4,m5,m6,m8][224,339]
[m1,m5,m7,m8][229,346]	[m2,m5,m6,m7][219,339]	[m4,m5,m6,m9][217,340]
[m1,m5,m7,m9][222,347]	[m2,m5,m6,m8][221,340]	[m4,m5,m7,m8][226,342]
[m1,m5,m8,m9][224,348]	[m2,m5,m6,m9][214,341]	[m4,m5,m7,m9][219,343]
[m1,m6,m7,m8][230,348]	[m2,m5,m7,m8][223,343]	[m4,m5,m8,m9][221,344]
[m1,m6,m7,m9][223,349]	[m2,m5,m7,m9][216,344]	[m4,m6,m7,m8][227,344]
[m1,m6,m8,m9][225,350]	[m2,m5,m8,m9][218,345]	[m4,m6,m7,m9][220,345]
[m1,m7,m8,m9][227,353]	[m2,m6,m7,m8][224,345]	[m4,m6,m8,m9][222,346]
[m2,m3,m4,m5][221,336]	[m2,m6,m7,m9][217,346]	[m4,m7,m8,m9][224,349]
[m2,m3,m4,m6][222,338]	[m2,m6,m8,m9][219,347]	[m5,m6,m7,m8][225,341]
[m2,m3,m4,m7][224,341]	[m2,m7,m8,m9][221,350]	[m5,m6,m7,m9][218,342]
[m2,m3,m4,m8][226,342]	[m3,m4,m5,m6][223,334]	[m5,m6,m8,m9][220,343]
[m2,m3,m4,m9][219,343]	[m3,m4,m5,m7][225,337]	[m5,m7,m8,m9][222,346]
[m2,m3,m5,m6][220,335]	[m3,m4,m5,m8][227,338]	[m6,m7,m8,m9][223,348]

Soluzione per la terza domanda: [m1,m3,m6,m8]

Naturalmente per generare ed esaminare tutte le combinazioni è opportuno scrivere un programma. In alternativa si può cercare di procedere per via euristica.

## ESERCIZIO 4

## PREMESSA

*IL NOSTRO 11 SETTEMBRE*

*Come tutti i francesi, sapevo che si stavano preparando attentati, che alcuni erano stati sventati. Ciò nonostante, sono rimasto sbigottito quando ho ricevuto sul mio iPhone la notifica di allerta per la sparatoria a Charlie Hebdo. Senza sapere altro, ho capito subito che si trattava di qualcosa di grave, di terribile. Alle 12.50 ho twittato “Mercoledì 7 gennaio 2015: il nostro 11 settembre”, perché in effetti credo proprio che questo attentato diventerà uno spartiacque. Questo è soltanto l’inizio. Tuttavia, se nella sostanza mi aspettavo una cosa del genere, nella forma no. E poi non collegherei l’attentato all’uscita di “Sottomissione”. Nel suo romanzo Houellebecq annuncia ciò che bolle in pentola da anni, ma proiettandolo nel futuro. Il fatto è che questa guerra civile, che egli annuncia come un’ipotesi da romanzo, si regge su numerosi focolai individuabili da anni, ma meticolosamente soffocati dai media col pretesto di evitare, secondo un’espressione ormai ratificata, di “fare il gioco di Le Pen”. Anch’io penso che l’Europa sia morta. E non esistono azioni politiche che possano metterci al riparo del fondamentalismo. Si sarebbe potuto evitare di dichiarare guerra all’Islam in modo planetario da anni - Iraq, Libia, Afghanistan, Mali....E poi affrancarsi da queste guerre che combattiamo con i nostri eserciti tradizionali contro una guerriglia che permette a due uomini armati di due kalashnikov e con due o tre automobili rubate di mettere un Paese intero in ginocchio e di farlo cadere in uno stato di terrore assoluto. E gli intellettuali non hanno più un peso. Sono anni che non fanno il loro lavoro, dicendo che questo pericolo non esiste o biasimando coloro che dicono che il pericolo esiste. Scommetto che continueranno a comportarsi con ancora maggiore aggressività, difendendo le loro tesi e accusando altri di essere responsabili dell’accaduto: per alcuni i musulmani, per altri quelli che contrastano i musulmani. E questa si chiama “guerra civile”. Ricordiamoci che i due (o tre) assassini sono stati addestrati alla guerriglia. La preparazione, il sangue freddo mantenuto durante l’operazione da commando, il modo di sparare, la calma, la determinazione e la fuga: tutto dimostra che si tratta di uomini agguerriti. Sono stati addestrati su un terreno di operazioni militari? Può darsi. Probabilmente andranno avanti fino a morire da martiri. E poi altri raccoglieranno da loro il testimone.*

Michel Ontray, *Il nostro 11 settembre*, tratto da Atlante de La Repubblica, gennaio 2015

## PROBLEMA

Rispondere alle seguenti domande numerate, riportando nella successiva tabella la lettera maiuscola (senza punto) corrispondente alla risposta ritenuta corretta.

1. Nell’incipit del brano si capisce che:
  - A. Nonostante i Servizi di sicurezza messi in atto in Francia, i francesi hanno sottovalutato il pericolo;
  - B. L’autore, pur sperando che non accadesse, era convinto che prima o poi la Francia avrebbe subito un attacco terroristico;
  - C. L’autore, pur immaginando che qualcosa di pesante sarebbe potuto accadere in Francia, non può credere all’entità dell’attentato, così grave e sconvolgente, messo in atto dai terroristi;
  - D. In Francia tutti si aspettavano un attentato di così elevata gravità.
2. Nel brano si fa anche uso di un linguaggio:
  - A. Legato alla terminologia giornalistica;
  - B. Legato alla trasmissione contemporanea di informazioni;
  - C. Estremamente formale;
  - D. Estremamente tecnico con molti termini di sottocodice legati al mondo della guerra.
3. L’autore accusa soprattutto:



- A. I politici che hanno sottovalutato la situazione;
- B. Gli intellettuali e i mezzi di informazione che, per ammorbidire le circostanze, spesso negano le evidenze;
- C. I mezzi di informazione che enfatizzano troppo il pericolo del terrorismo;
- D. Il clima da “11 settembre” che la Francia ha sempre avuto paura di dover affrontare.
4. Quando l’autore usa l’espressione “*L’attentato diventerà uno spartiacque*”:
- A. Egli usa una similitudine per dire che la Francia e i suoi cittadini, dopo l’attentato a Charlie Hebdo, saranno cambiati per sempre;
- B. Egli usa una metafora per dire che, dal momento dell’attentato a Charlie Hebdo, ci sarà un’escalation di attentati che, sempre più violentemente, colpiranno la Francia e i cittadini francesi;
- C. Egli usa una metafora per dire che esiste una Francia che pensava di potere essere preservata dal terrorismo e una Francia oramai vulnerabile, dopo l’attentato al giornale Charlie Hebdo;
- D. Egli usa un paragone con il famoso attentato di New York, alle Torri Gemelle, dell’11 settembre 2001.
5. Quando l’autore parla di “*guerra civile*” intende dire:
- A. Un conflitto tra appartenenti a uno stesso stato, ma, in questo caso, di fedi o idee differenti;
- B. Un conflitto tra terroristi islamici e potenze occidentali;
- C. Un conflitto tra terroristi di matrice islamica e terroristi di matrice fascista o neonazista;
- D. Un conflitto tra nazioni arabe musulmane e nazioni filo-occidentali.
6. Quando l’autore riflette su ciò che si sta combattendo, mette in luce:
- A. La sperequazione tra l’apparente potenza dell’apparato militare di una nazione e l’esiguità di chi attenta che però dimostra efficacia e temerarietà;
- B. La fragilità dei servizi segreti di una nazione che, pur con dispiegamenti numerosi e tradizionali, non riescono a fermare poche persone efferate e risolte;
- C. Che pochi terroristi riescono a tenere in scacco tutta una nazione e a manipolare gli intellettuali della stessa che dichiarano che il pericolo non sussiste;
- D. Che avere dichiarato guerra a stati filo-musulmani ha messo al riparo dal fondamentalismo alcuni stati e altri no, come è successo in Francia.
7. L’autore, con l’espressione “*fare il gioco di Le Pen*”, intende:
- A. Favorire l’estrema sinistra francese;
- B. Essere d’accordo con l’estremismo islamico;
- C. Favorire la destra francese;
- D. Essere d’accordo con la sinistra moderata francese.
8. Nella parte finale del brano, il punto di vista dell’autore, circa la progressione degli atti terroristici, sembra essere
- A. Pessimistico;
- B. Ottimistico;
- C. Scettico;
- D. Fazioso.
9. In questa frase, “*La preparazione, il sangue freddo mantenuto durante l’operazione da comando, il modo di sparare, la calma, la determinazione e la fuga: tutto dimostra che si tratta di uomini agguerriti.*”, c’è:
- A. Una similitudine;
- B. Un chiasmo;
- C. Una enumerazione;
- D. Una perifrasi.
10. Quando l’autore se la prende con gli intellettuali, li accusa soprattutto di:



- A. Non fare il loro lavoro e di apprezzare coloro che dicono di moderare i termini riguardo la “questione” del terrorismo;  
 B. Non fare il loro lavoro e di disapprovare gli allarmisti circa la “questione” del terrorismo;  
 C. Apprezzare chi mette in guardia circa la “questione” terroristica, ma sempre stando attenti a non esagerare nell’alzare i toni dello scontro;  
 D. Ammonire coloro che sono troppo morbidi rispetto al problema del terrorismo.

DOMANDA	RISPOSTA
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

## SOLUZIONE

DOMANDA	RISPOSTA
1	C
2	B
3	B
4	C
5	A
6	A
7	C
8	A
9	C
10	B

## COMMENTI ALLA SOLUZIONE

- Il testo, nella parte iniziale, dice *“Come tutti i francesi, sapevo che si stavano preparando attentati, che alcuni erano stati sventati. Ciò nonostante, sono rimasto sbigottito quando ho ricevuto sul mio iPhone la notifica di allerta per la sparatoria a Charlie Hebdo.”* Non si parla di Servizi di sicurezza (risposta A, errata), l’autore non esprime speranza che non accadesse nessun attentato (risposta B, errata), si dice che in Francia si aspettavano che potesse accadere qualcosa, ma non si dice che i francesi pensavano ad una tale gravità del fatto (risposta D, errata). La risposta corretta è la C.
- L’autore parla di iPhone e di twitter, strumenti o mezzi contemporanei per trasmettere informazioni (risposta B, corretta). Non ci sono, nel brano, termini legati al mondo giornalistico (risposta A, errata); il linguaggio non è formale (si usano i puntini di sospensione, molte metafore, una sintassi semplice e prevalentemente paratattica), risposta C, errata; “guerra”, “operazioni militari” non sono termini estremamente tecnici, solo “kalashnikov” è un termine più tecnico, ma è solo uno e quindi non sono “molti” (risposta D, errata).



3. L'autore afferma: *“Il fatto è che questa guerra civile, che egli annuncia come un'ipotesi da romanzo, si regge su numerosi focolai individuabili da anni, ma meticolosamente soffocati dai media col pretesto di evitare, secondo un'espressione ormai ratificata, di “fare il gioco di Le Pen”; “Sono anni che non fanno il loro lavoro, dicendo che questo pericolo non esiste o biasimando coloro che dicono che il pericolo esiste”*. La risposta corretta è dunque la B.
4. “Spartiacque” è una metafora, un'immagine per indicare una cesura netta tra un prima e un dopo (risposta A, si parla di similitudine e risposta D, si parla di paragone, sono errate). Nel testo non si dice che gli attentati saranno sempre più violenti (risposta B, errata), ma si intuisce che, come negli USA, dopo l'11 settembre 2001, la paura e l'atmosfera di tensione sono cambiate notevolmente, così in Francia dopo l'attentato a Charlie Hebdo l'atmosfera e il timore saranno sicuramente differenti rispetto ad un “prima” (risposta C, corretta).
5. “Guerra civile” = Conflitto combattuto tra i cittadini di uno stesso Stato diviso in fazioni (in questo caso francesi di fede musulmana contro francesi appartenenti ad altre fedi, laici, atei e che affermano prepotentemente la libertà di espressione). La risposta corretta è la A.
6. Il testo dice *“Si sarebbe potuto evitare di dichiarare guerra all'Islam in modo planetario da anni - Iraq, Libia, Afghanistan, Mali....E poi affrancarsi da queste guerre che combattiamo con i nostri eserciti tradizionali contro una guerriglia che permette a due uomini armati di due kalashnikov e con due o tre automobili rubate di mettere un Paese intero in ginocchio e di farlo cadere in uno stato di terrore assoluto”*. L'autore quindi sottolinea la discrepanza tra la potenza dell'apparato militare di una nazione (Francia o coalizioni internazionali), ma sostanzialmente inefficace e l'esiguità di chi attenta (due uomini armati di Kalashnikov) ma estremamente attiva e incisiva (risposta A, corretta). Non si parla di Servizi Segreti (risposta B, errata), i terroristi tengono in scacco una nazione, ma non hanno manipolato gli intellettuali (risposta C, errata), la risposta D contiene informazioni errate o parzialmente vere (risposta D, corretta).
7. Una veloce ricerca in Internet mostra che Marie Le Pen è oggi la leader della Destra in Francia e suo padre (Jean Marie) è stato leader dell'estrema destra Fronte Nazionale (risposta C, corretta).
8. L'ultima frase del testo dice: *“Probabilmente andranno avanti fino a morire da martiri. E poi altri raccoglieranno da loro il testimone.”* L'autore immagina una “catena” di attentati senza fine da parte di persone che accettano di martirizzarsi in nome della fede. Quindi egli ha consapevolezza che il futuro della Francia, e non solo, sarà sicuramente non positivo (pessimismo) (risposta A, corretta). L'autore non è scettico (Atteggiamento di sfiducia, di dubbio o di diffidenza nei confronti di valori, fatti o persone) (risposta C, errata); non è ovviamente ottimistico (risposta B, errata) né fazioso (che sostiene con intransigenza, senza obiettività il proprio partito o le proprie tesi; animato da spirito di parte) (risposta D, errata).
9. La figura retorica presente è l'enumerazione (accostamento di parole o espressioni poste l'una dopo l'altra) (risposta C, corretta); una similitudine è un paragone fra due entità che abbiano almeno una caratteristica in comune, realizzata con la congiunzione “come” (risposta A errata); il chiasmo è la ripetizione di due elementi in due frasi\sintagmi successive\i, ma con ordine invertito:  $x - y / y - x$  (risposta B errata); una perifrasi è un giro di parole per esprimere un'idea senza usare il nome che normalmente la individua (risposta D, errata).
10. Il testo, circa gli intellettuali afferma che *“Sono anni che non fanno il loro lavoro, dicendo che questo pericolo non esiste o biasimando coloro che dicono che il pericolo esiste.”* Biasimare significa condannare, disapprovare: la risposta corretta è quindi la B. Le altre risposte contengono informazioni errate o parzialmente corrette.

ESERCIZIO 5

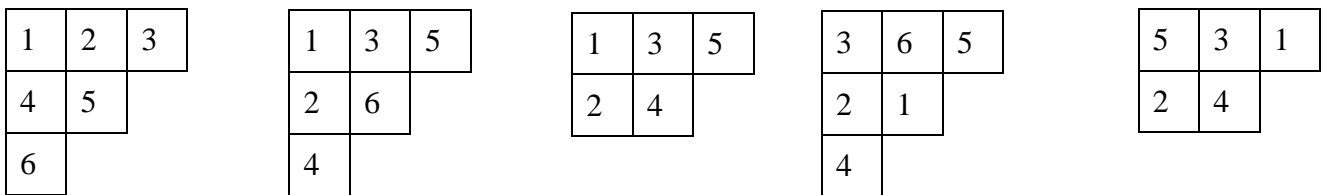
PREMESSA

Remember that  $\lambda = [n_1, n_2, \dots, n_p]$ , a list of positive integers in non-increasing order, can be thought as a *shape* of an F-diagram (or *Ferrers diagram*) that is composed of rows of boxes; there are as many rows as elements in the list, and each row has as many boxes as the value of the corresponding element.

If the numbers appearing in  $\lambda$  sum up to  $m$  then we write  $\lambda \vdash m$ ; so:

$$[6,5,4,3,2] \vdash 20; [2,2,2,2] \vdash 8; [5] \vdash 5.$$

If an F-diagram of shape  $\lambda \vdash m$  is filled with the numbers  $1, 2, \dots, m$  is called a Y-diagram (or *Young diagram*); examples are:



A Young diagram is called *standard* if:

- in each row the numbers are increasing (from left to right),
- in each column the numbers are increasing (from top to bottom).

In the examples above, the first three diagrams are standard; the last two diagrams are not standard.

PROBLEMA

Consider the shape  $[3,2,2,2] \vdash 9$ ; how many standard Y-diagrams of that shape satisfies the following conditions:

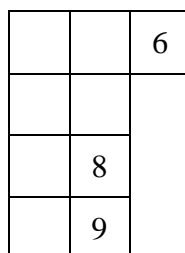
1. the last box of the first row contains 6,
2. the last box of the third row contains 8,
3. the last box of the last row contains 9.

Put your answer, as an integer number, in the box below.

SOLUZIONE

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

La forma  $[3,2,2,2] \vdash 9$ , riempita parzialmente come richiesto dal problema, è mostrata nella seguente figura.



Si nota subito che il 7 può comparire solo in due caselle come mostrato di seguito.



		6
	8	
7	9	

		6
	7	
	8	
	9	

Quindi si tratta di costruire gli standard delle due forme  $[2,2,1] \vdash 5$  e  $[2,1,1,1] \vdash 5$ ; questi sono mostrati di seguito.

1	2
3	4
5	

1	3
2	4
5	

1	2
3	5
4	

1	3
2	5
4	

1	4
2	5
3	

1	2
3	
4	
5	

1	3
2	
4	
5	

1	4
2	
3	
5	

1	5
2	
3	
4	

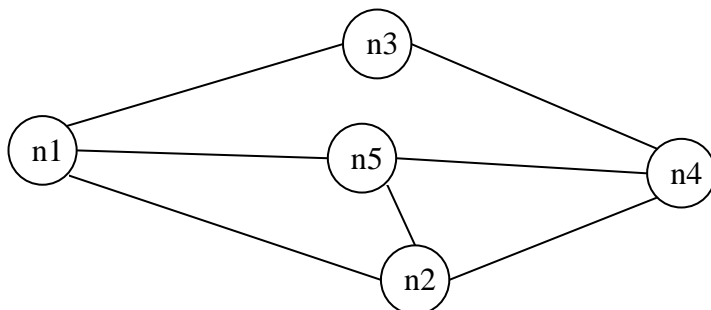
In totale 9 riempimenti.



ESERCIZIO 6

PREMESSA

Il seguente *grafo* descrive i collegamenti esistenti fra 5 città: queste sono rappresentate da *nodi* di nome  $n_1, n_2, \dots, n_5$  e i collegamenti sono rappresentati da segmenti, detti *archi*, tra nodi.



Questo grafo può essere descritto da un elenco di termini, ciascuno dei quali definisce un arco tra due nodi del grafo con la indicazione della relativa distanza in chilometri:

- |                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| arco( $n_1, n_2, 6$ ) | arco( $n_1, n_3, 5$ ) | arco( $n_3, n_4, 4$ ) |
| arco( $n_1, n_5, 3$ ) | arco( $n_2, n_4, 3$ ) | arco( $n_2, n_5, 2$ ) |
| arco( $n_5, n_4, 6$ ) |                       |                       |

Due nodi si dicono *adiacenti* se sono collegati da un arco. Un *percorso* (o *cammino*) tra due nodi del grafo consiste in una sequenza di nodi ciascuno dei quali (tranne l'ultimo) è adiacente con il successivo; un percorso può, quindi essere descritto con una lista di nodi (quelli toccati dal percorso, ordinata dal nodo di partenza al nodo di arrivo). Per esempio, la lista  $[n_5, n_2, n_4, n_3]$  descrive un percorso dal nodo  $n_5$  al nodo  $n_3$ ; tale percorso ha lunghezza  $K = 2 + 3 + 4 = 9$ .

Un *ciclo* è un percorso che inizia e termina nello stesso nodo, per esempio  $[n_5, n_2, n_1, n_5]$ . Un percorso si dice *semplice* se *non* ha nodi ripetuti: un percorso semplice, quindi, non contiene cicli; per esempio  $[n_5, n_2, n_4, n_3]$  è semplice, mentre  $[n_5, n_2, n_1, n_5, n_2, n_4, n_3]$  non è semplice perché ha nodi ripetuti.

PROBLEMA

È dato un grafo descritto dal seguente elenco di archi:

- |                        |                        |                        |                        |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| arco( $n_1, n_4, 9$ )  | arco( $n_1, n_8, 13$ ) | arco( $n_1, n_5, 12$ ) | arco( $n_4, n_8, 17$ ) |
| arco( $n_5, n_7, 7$ )  | arco( $n_2, n_6, 13$ ) | arco( $n_4, n_7, 12$ ) | arco( $n_3, n_6, 15$ ) |
| arco( $n_4, n_5, 11$ ) | arco( $n_2, n_7, 15$ ) | arco( $n_3, n_7, 11$ ) | arco( $n_2, n_5, 18$ ) |

N.B. L'arco tra  $n_1$  e  $n_4$  e l'arco tra  $n_5$  e  $n_7$  sono a senso unico (dal primo verso il secondo nodo).

Disegnare il grafo (è possibile farlo con gli archi che non si incrociano) e determinare:

- la lista  $L_1$  del percorso (semplice) *più breve* tra  $n_3$  e  $n_8$ ;
- la lista  $L_2$  del percorso semplice *più lungo* tra  $n_3$  e  $n_8$ ;
- il numero  $N$  di percorsi semplici da  $n_3$  a  $n_8$  di lunghezza 72

L1	
L2	
N	

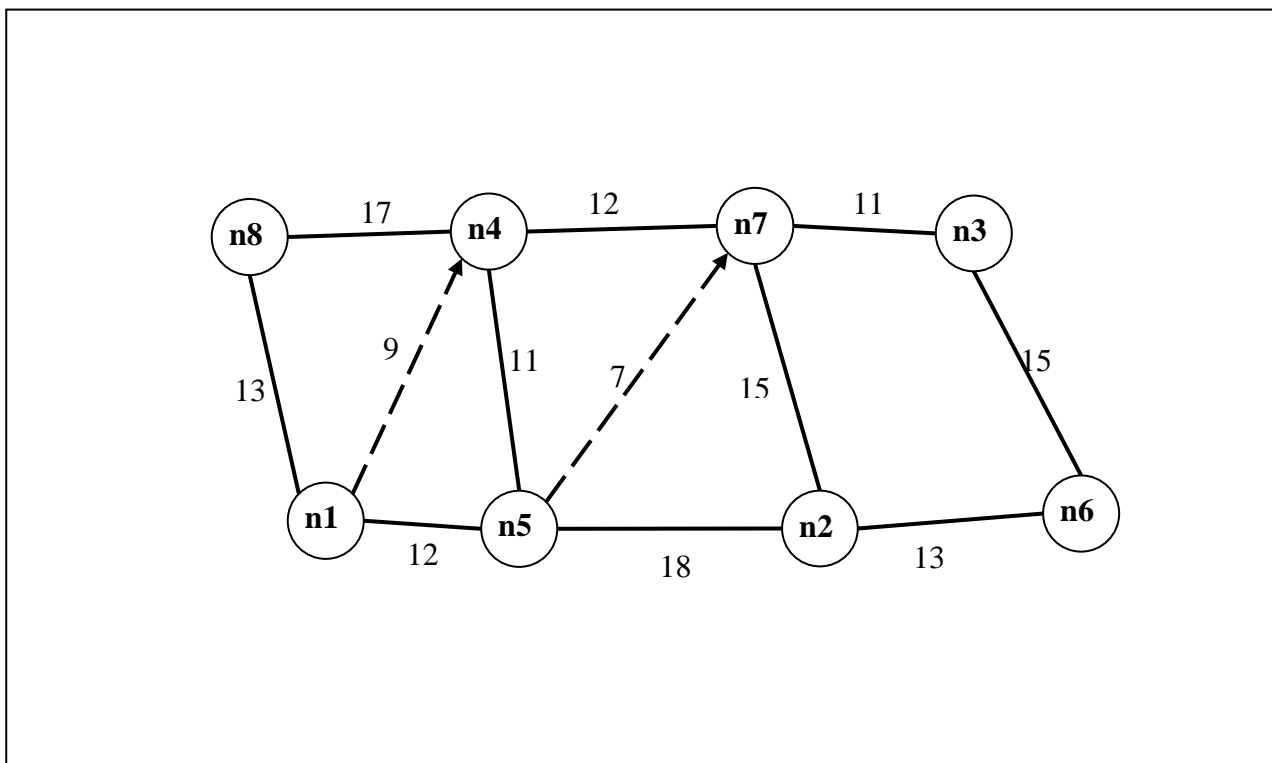
SOLUZIONE

L1	$[n_3, n_7, n_4, n_8]$
----	------------------------

L2	[n3, n6, n2, n7, n4, n5, n1, n8]
N	2

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Il grafo descritto dal problema è un grafo planare: si può disegnare su un piano in modo che gli archi non si incrocino come, per esempio, mostrato nella seguente figura.



Dal grafo si può costruire l'albero dei percorsi semplici tra il nodo n3 e il nodo n8. Da quest'ultimo, oppure direttamente dal grafo, si elencano tutti i percorsi semplici tra gli stessi nodi (con la relativa lunghezza):

PERCORSO TRA n3 e n8	LUNGHEZZA
[n3, n6, n2, n7, n4, n8]	72
[n3, n6, n2, n7, n4, n5, n1, n8]	91
[n3, n6, n2, n5, n1, n8]	71
[n3, n6, n2, n5, n1, n4, n8]	84
[n3, n6, n2, n5, n4, n8]	74
[n3, n6, n2, n5, n7, n4, n8]	82
[n3, n7, n4, n8]	40
[n3, n7, n4, n5, n1, n8]	59
[n3, n7, n2, n5, n1, n8]	69
[n3, n7, n2, n5, n1, n4, n8]	82
[n3, n7, n2, n5, n4, n8]	72

La soluzione segue facilmente.

## ESERCIZIO 7

## PROBLEMA

Alcuni ragazzi decidono di costruire un ipertesto multimediale sugli avvenimenti significativi della loro regione per la prossima stagione turistica. Per organizzare il progetto, dividono il lavoro in singole attività e, per ciascuna di queste stabiliscono quanti di loro devono partecipare e stimano il tempo per portarla a conclusione. La tabella che segue descrive le attività (indicate rispettivamente con le sigle A1, A2, A3, ...), riportando per ciascuna di esse il numero di ragazzi assegnato e il numero di giorni necessari per completarla.

ATTIVITÀ	RAGAZZI	GIORNI
A1	6	1
A2	4	2
A3	3	2
A4	3	3
A5	3	2
A6	3	4
A7	3	3
A8	3	2
A9	3	3
A10	3	2
A11	4	2
A12	6	1

N.B. Ai fini del problema non è importante conoscere la descrizione delle singole attività.

Le attività devono succedersi opportunamente nel tempo perché, per esempio, una attività utilizza il prodotto di altre: quindi esistono delle *priorità*, descritte con coppie di sigle; ogni coppia esprime il fatto che l'attività associata alla sigla di destra (detta *successiva*) può iniziare solo quando l'attività associata alla sigla di sinistra (detta *precedente*) è terminata. Ovviamente se una attività ha più precedenti, può essere iniziata solo quando *tutte* le precedenti sono terminate.

In questo caso le priorità sono:

[A1,A2], [A1,A3], [A3,A6], [A1,A4], [A2,A5], [A5,A7], [A4,A5], [A7,A12], [A5,A11],  
 [A11,A12], [A3,A9], [A6,A8], [A4,A9], [A9,A11], [A10,A8], [A8,A12], [A3,A10].

Trovare il numero N di giorni necessari per completare il progetto, tenuto presente che alcune attività possono essere svolte in parallelo e che ogni attività *deve* iniziare prima possibile (nel rispetto delle priorità). Inoltre, trovare inoltre Rm: il numero minimo di ragazzi necessario per realizzare il progetto così pianificato.

N.B. In un progetto si dice *percorso critico* una successione di attività (la prima delle quali è la prima attività del progetto e l'ultima è l'ultima attività del progetto) tali che ognuna (tranne la prima) inizia esattamente quando termina la precedente. Nel presente progetto quanti sono i cammini critici? Riportare tale numero nel rigo Pc.

N	
Rm	
Pc	

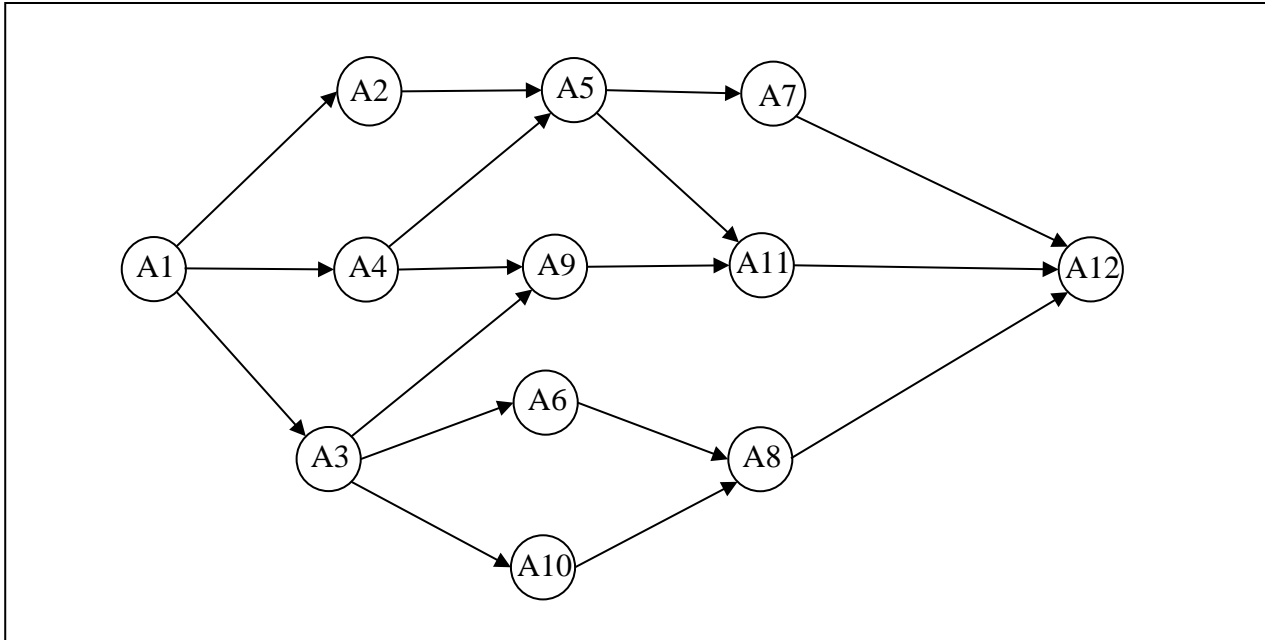
## SOLUZIONE

N	10
Rm	12

Pc	3
----	---

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per prima cosa, dai dati sulle priorità occorre disegnare il *diagramma delle precedenze*, cioè il grafo che ha come nodi le attività e come frecce le precedenze: indica visivamente come si devono susseguire le attività.



Per costruire tale grafo (mostrato in figura) si disegnano tanti nodi quante sono le attività (ciascun nodo porta il nome della corrispondente attività).

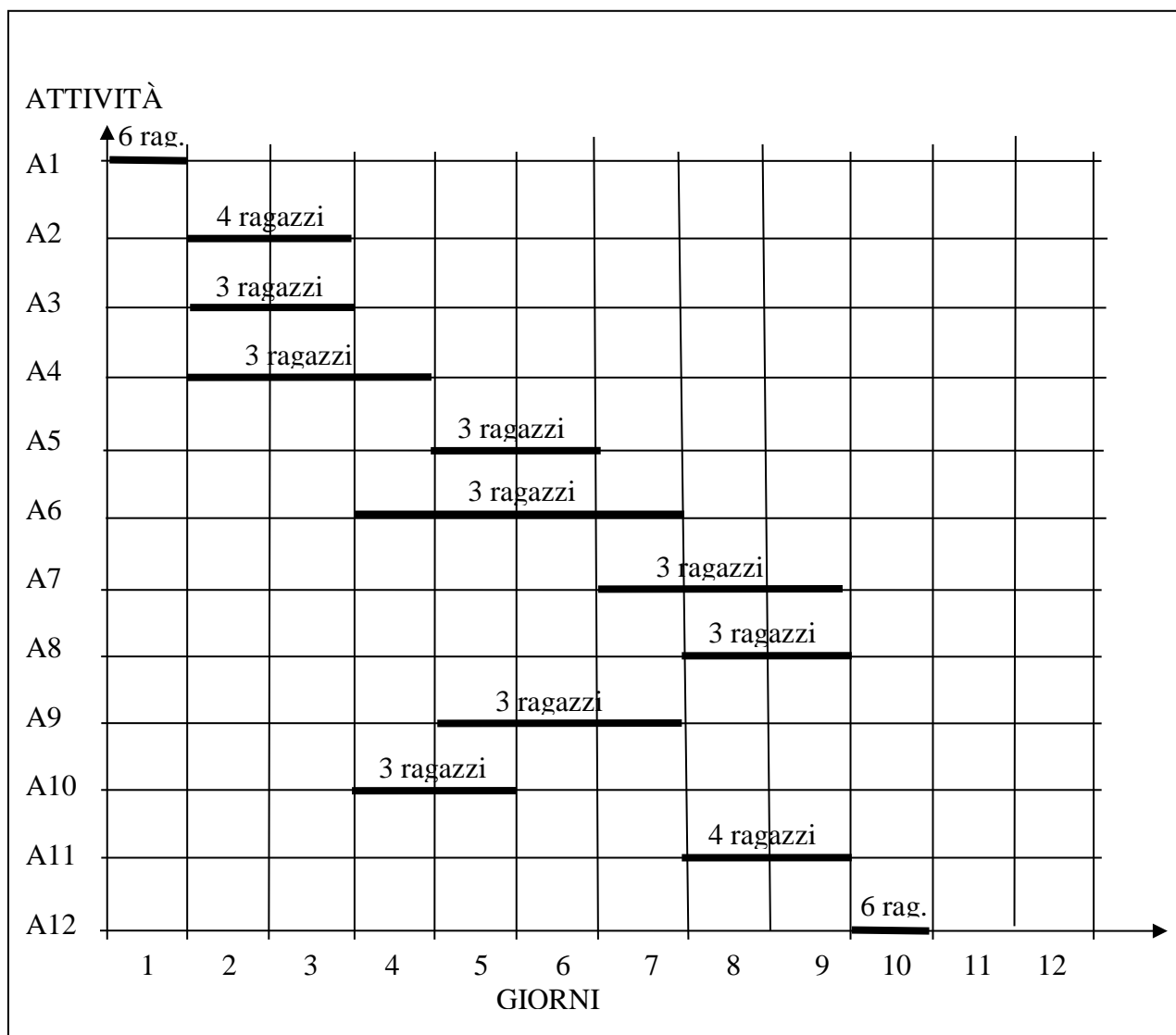
Esiste una attività che compare solo a sinistra nelle coppie che descrivono le priorità: questa è l'attività *iniziale* (in questo caso A1); il nodo corrispondente deve essere disegnato alla sinistra di tutti gli altri.

Esiste una attività che compare solo a destra nelle coppie che descrivono le priorità: questa è l'attività *finale* (in questo caso A12); il nodo corrispondente deve essere disegnato alla destra di tutti gli altri.

Poi per ogni coppia che descrive le priorità si disegna una freccia che connette i nodi coinvolti in quella coppia. Alla fine, in generale, si otterrà un grafo con frecce che si incrociano: tenendo fissi il nodo iniziale e il nodo finale si spostano gli altri nodi per cercare di ottenere un grafo con frecce che non si incrociano (come, appunto, è mostrato in figura).

Poi dal grafo e dalla tabella che descrive le attività, si può compilare il diagramma di Gantt; questo riporta sull'asse verticale le attività (per esempio dall'alto verso il basso), sugli assi orizzontali il tempo, in questo caso misurato in giorni. Su ogni asse orizzontale (parallelo a quello dei tempi e in corrispondenza a una attività) è sistemato un segmento che indica l'inizio e la durata della corrispondente attività (e il numero di ragazzi che devono svolgerla).

Così, per esempio, l'attività A1 inizia il giorno 1 e dura un giorno; quando è terminata, il giorno 2 possono iniziare le attività A2, A3 e A4 (che quindi si svolgono parzialmente in parallelo); l'attività A5, per esempio, può iniziare solamente quando è terminata sia la A2 sia la A4.



Dal Gantt si vede che il progetto dura 10 giorni; e che il numero massimo di ragazzi al lavoro contemporaneamente è 12 (giorno 5): questo è anche il numero minimo di ragazzi per realizzare il progetto così pianificato. I percorsi critici sono

[A1,A4,A5,A7,A12],

[A1,A4,A9,A11,A12],

[A1,A3,A6,A8,A12].

Il significato “intuitivo” del percorso critico è il seguente. Per quanto sia accurata una pianificazione, può sempre verificarsi che una attività richieda più tempo di quello previsto. Se *ritarda* una attività su un percorso critico, allora ritarda anche la data di fine del progetto.

ESERCIZIO 8

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura.

N.B. L'espressione

$$A^B$$

ha valore pari a (quello di) A *elevato* a (quello di) B; il simbolo  $^$  è un operatore *infixo* che indica l'elevamento a potenza. Una altra maniera per indicare la stessa operazione nello pseudo linguaggio è  $\text{exp}(A,B)$ :  $\text{exp}$  è un operatore *prefisso*. Talvolta si usa anche la forma (infissa)  $A^{**}B$ .

```

procedura PRIMA;
variables A, B, C, K integer;
A ← -1000;
B ← 1000;
K ← 0;
while A<B do
    K ← K + 1;
    A ← A + 3×K3 - K;
    B ← B - 3×K;
    C ← (A + B) ×K;
endwhile;
output A, B, C;
endprocedura;
    
```

Scrivere i valori di output nella seguente tabella.

A	
B	
C	

SOLUZIONE

A	1324
B	916
C	15680

COMMENTO ALLA SOLUZIONE

Il corpo del ciclo “while” viene ripetuto finché il valore di A è minore del valore di B; i valori delle tre variabili (K, A, B, C) sono mostrati nella seguente tabella, alla *fine* di ogni ripetizione.

K	A	B	C
1	-998	997	-1
2	-976	991	30
3	-898	982	252
4	-710	970	1040
5	-340	955	3075
6	302	937	7434
7	1324	916	15680



ESERCIZIO 9

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura.

```

procedura SECONDA;
variables A, B, I integer;
input A;
input B;
for I from 1 to 9 step 1 do;
    if A > B then output B; input B;
    else output A; input A;
endif;
endfor;
endprocedure;
    
```

Compreso il significato della procedura, supposto che i valori di input a disposizione di ogni variabile siano i seguenti:

la sequenza 2, 2, 5, 7, 8, 9, 9, 11, 5, 6 per A,  
 la sequenza 1, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 9 per B,

scrivere nella lista L i valori messi in output dalla procedura mantenendone l'ordine, (per esempio il primo valore della lista è il primo messo in output).

L

SOLUZIONE

L

COMMENTO ALLA SOLUZIONE

Nella seguente tabella sono riportate informazioni riguardanti l'esecuzione del corpo del ciclo "for": la seconda e la terza colonna riportano i valori di A e B (rispettivamente) prima e dopo lo statement "if".

I	A	B	valore in output	variabile in input
1	2	1	1	B
	2	3		
2	2	3	2	A
	2	3		
3	2	3	2	A
	5	3		
4	5	3	3	B
	5	4		
5	5	4	4	B
	5	5		
6	5	5	5	A
	7	5		



7	7	5	5	B
	7	5		
8	7	5	5	B
	7	6		
9	7	6	6	B
	7	7		

ESERCIZIO 10

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura:

```

procedure TERZA;
variables A, B, J, K integer;
for J = 1 to 3 step 1 do;
    input A, B;
    K ← 0;
    while A < B do
        K ← K + 1;
        A ← A + K × K;
        B ← B - K;
    endwhile;
    output K, B;
endfor;
endprocedure;
    
```

Compreso il significato della procedura, supposto che i valori di input siano i seguenti:

la sequenza -10, -20, -50 per A,

la sequenza 10, 20, 50 per B,

scrivere, nell'ordine in cui sono prodotti in output, nella lista L1 i valori di K e in L2 quelli di B.

L1	
L2	

SOLUZIONE

L1	[3,4,6]
L2	[4,10,29]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

La seguente tabella riporta i valori di K, A, B alla fine del corpo del ciclo “while” quando J vale 1 e i valori in input per A e B sono rispettivamente -10 e 10.

K	A	B
1	-9	9
2	-5	7
3	4	4

La seguente tabella riporta i valori di K, A, B alla fine del corpo del ciclo “while” quando J vale 2 e i valori in input per A e B sono rispettivamente -20 e 20.

K	A	B
1	-19	19
2	-15	17
3	-6	14
4	10	10

La seguente tabella riporta i valori di K, A, B alla fine del corpo del ciclo “while” quando J vale 3 e i valori in input per A e B sono rispettivamente -50 e 50.

K	A	B
1	-49	49
2	-45	47
3	-36	44
4	-20	40
5	5	35
6	41	29

ESERCIZIO 11

PROBLEMA

John drove the first half of his trip on a gravel road, the next 20 miles on pavement, and the remaining one fourth on a dirt road. In miles, how long was the trip? Put your answer as a number with two rounded decimals and with “.” as a decimal mark, in the box below.

SOLUZIONE

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Let the answer be  $x$ ; then:

$$\frac{1}{2}x + 20 + \frac{1}{4}x = x \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4}x = 20 \quad \rightarrow \quad x = 80$$

## ESERCIZIO 12

### PREMESSA

If you are given a (finite) set of positive integers, you can put them in a list ordered in non-decreasing order. If the number of the elements in the list is odd, the central element of the list is called the *median* of the original set of numbers. Note that, in the list, the median has as many elements preceding it as are the elements that follow it.

### PROBLEMA

Let  $A$  be a set of nine *distinct* positive integers. Only six elements of  $A$  are known and are 1, 3, 4, 6, 9, and 20. What is the number of possible values of the median of  $A$ ? Put your answer, as an integer, in the box below.

### SOLUZIONE

### COMMENTO ALLA SOLUZIONE

The median is the fifth element (of the *complete* list of elements of  $A$  in increasing order), and has four elements preceding it and four elements following it. Therefore 1 can never be median, as well as 2, 3 and 4 and all numbers greater than 9.

We are left only with 5, 6, 7, 8, 9: that means five possibilities.

N.B. Of course, each possibility should be checked, that is for each value one *example* (at least) of the *complete* set  $A$  should be given; a “*complete*” set  $A$  is obtained “adding” three different integers to the known subset 1, 3, 4, 6, 9, 20.

1	2	3	4	<b>5</b>	6	7	9	20	2, 5, 7 added
1	3	4	5	<b>6</b>	7	8	9	20	5, 7, 8 added
1	3	4	6	<b>7</b>	8	9	10	20	7, 8, 10 added
1	3	4	6	<b>8</b>	9	10	11	20	8, 10, 11 added
1	3	4	6	<b>9</b>	10	11	12	20	10, 11, 12 added

Note also that instead of 10, 11 and 12 one could choose any triplet of numbers greater than 9 (and different from 20).