

ESERCIZIO1

PREMESSA

Per risolvere problemi spesso esistono delle regole che, dai dati del problema, permettono di calcolare o *dedurre* la soluzione. Questa situazione si può descrivere col termine regola(<sigla>,<lista antecedenti>,<conseguente>) che indica una regola di nome <sigla> che consente di dedurre <conseguente> conoscendo tutti gli elementi contenuti nella <lista antecedenti>, detta anche *premessa*. Problemi “facili” possono essere risolti con una sola regola; per problemi “difficili” una sola regola non basta a risolverli, ma occorre applicarne diverse in successione.

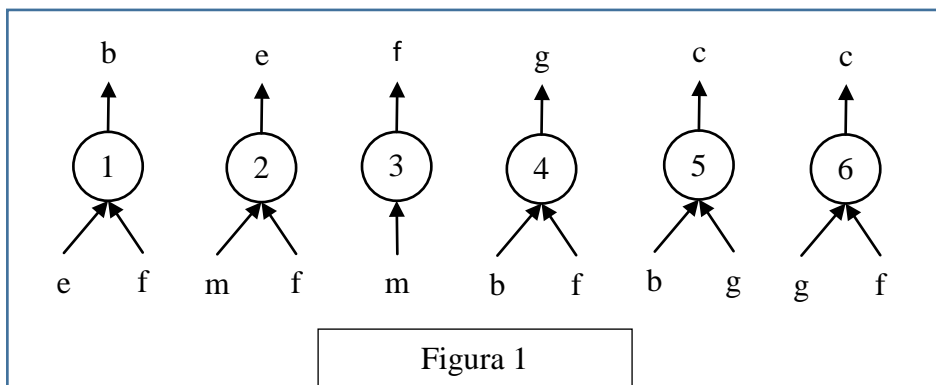
Si considerino le seguenti regole:

- regola(1,[e,f],b)      regola(2,[m,f],e)      regola(3,[m],f)
- regola(4,[b,f],g)      regola(5,[b,g],c)      regola(6,[g,f],c)

Per esempio la regola 1 dice che si può calcolare (o dedurre) **b** conoscendo **e** ed **f** (cioè gli elementi della lista [e,f]); conoscendo **b** ed **f** (cioè gli elementi della lista [b,f]) è possibile dedurre **g** con la regola 4. Quindi, a partire da **e** ed **f** è possibile dedurre prima **b** (con la regola 1) e poi **g** (con la regola 4).

Un *procedimento di deduzione* (o deduttivo, o di calcolo) è rappresentato da un *insieme di regole da applicare in sequenza opportuna* per dedurre un certo elemento (incognito) a partire da certi dati: quindi può essere descritto dalla lista delle sigle di queste regole. Il procedimento [1,4] descrive la soluzione del problema: “dedurre **g** a partire da **e** ed **f**”.

Una maniera grafica per rappresentare le regole è quella mostrata nella seguente figura 1: consiste nell’associare un albero (rovesciato) ad ogni regola: la radice (in alto) è il conseguente, le foglie (in basso) sono gli antecedenti.

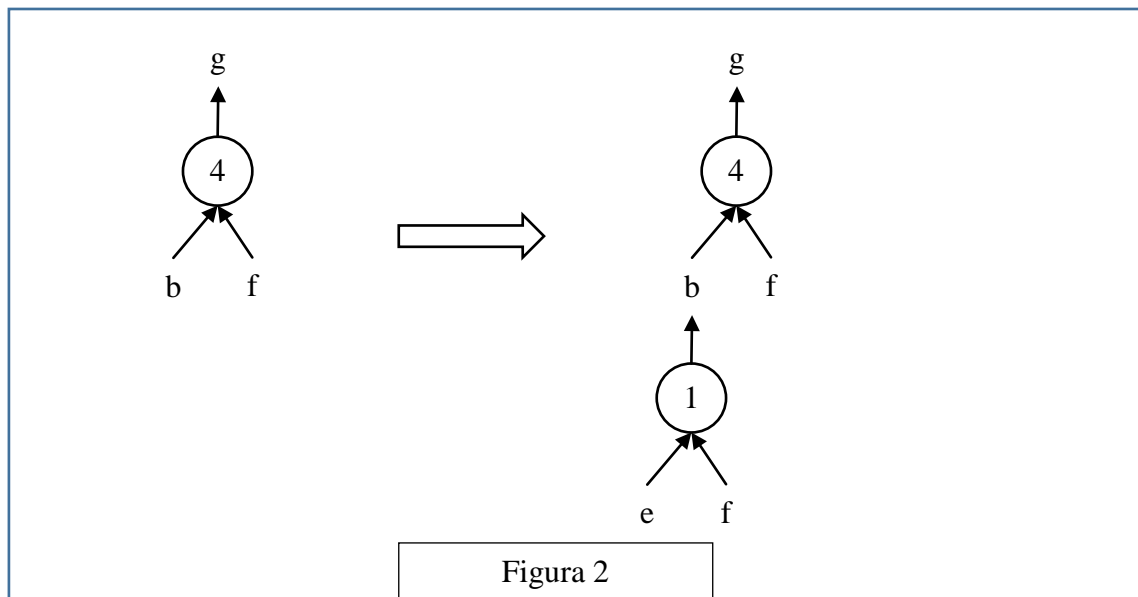


Con questa rappresentazione grafica, risolvere il problema “dedurre **g** a partire da **e** ed **f**” è particolarmente facile; si cerca un “albero” (cioè una regola) che ha come radice l’incognita (cioè **g**): in questo caso ne esiste solo uno che è la regola 4: si veda la figura 2 a sinistra.

Le foglie di questo albero (**b** ed **f**) *non* sono tutte note: quelle note (**f** in questo caso) sono vere e proprie foglie, quelle incognite (**b** in questo caso) vanno considerati come “anelli” a cui “appendere” un altro albero; quindi bisogna continuare *sviluppendo* la foglia incognita **b**, cioè “appendendo” a **b** l’albero rappresentato dalla regola 1, come illustrato nella figura 2 a destra.

Adesso tutte le foglie dell’albero così ottenuto (**e** ed **f**) sono note e il problema è risolto.

Si può anche dire che un albero le cui foglie sono tutte note rappresenta un procedimento per dedurre la “radice” a partire dalle “foglie”. Per costruire la lista corrispondente occorre *partire dal basso*: prima si applica la regola 1, che utilizza solo i dati; poi si può applicare la regola 4. Il procedimento è quindi (individuato dalla lista) [1,4].

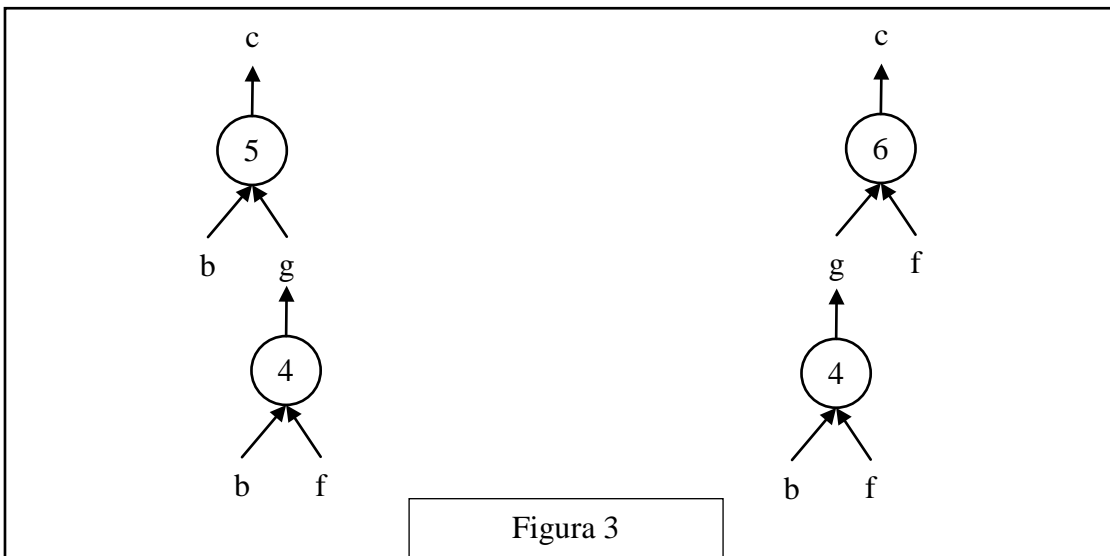


N.B. Nella lista non ci sono regole *ripetute*: infatti un procedimento di deduzione è un *insieme* di regole da applicare in opportuna sequenza. L'applicazione di una regola rende disponibile il conseguente da utilizzare (come antecedente) nell'applicazione di regole successive.

Nelle liste richieste le sigle delle regole sono elencate nell'ordine che corrisponde alla sequenza di applicazione: la prima (a sinistra) della lista deve essere la sigla che corrisponde alla prima regola da applicare (che ha come antecedenti solo dati); l'ultima (a destra) deve essere la sigla della regola che ha come conseguente l'elemento incognito da dedurre.

Per rendere unica la lista associata a un ben preciso procedimento (cioè a un ben preciso insieme di regole), si costruisce tale lista per passi successivi a partire dal primo elemento che è la sigla della prima regola da applicare; ad ogni passo, se ci fossero più regole applicabili, *per quel procedimento*, occorre dare la precedenza (nella lista) alla regola con sigla *inferiore*.

N.B. In alcuni casi esistono più procedimenti deduttivi possibili che permettono di ricavare un certo elemento dagli stessi dati in maniere diverse (cioè con *insiemi diversi di regole* e quindi con alberi diversi). Per esempio il problema “dedurre **c** a partire da **b** ed **f**” (dalle regole viste sopra) ha due distinti procedimenti risolutivi; gli alberi relativi ai due procedimenti sono mostrati nella seguente figura 3.



Le liste associate sono, rispettivamente, [4,5] e [4,6].

In un procedimento deduttivo, il numero di regole *differenti* coinvolte (e, quindi, anche il numero di elementi della lista corrispondente al procedimento) si dice *lunghezza* del procedimento.

**PROBLEMA**

Sono date le seguenti regole:

- |                   |                      |                      |                   |
|-------------------|----------------------|----------------------|-------------------|
| regola(1,[a,w],p) | regola(2,[n,m,y],p)  | regola(3,[y],n)      | regola(4,[y,n],m) |
| regola(5,[f],s)   | regola(6,[q,w],x)    | regola(7,[q],p)      | regola(8,[y],q)   |
| regola(9,[p,x],r) | regola(10,[a,p,w],f) | regola(11,[p,q,r],s) | regola(12,[w],a)  |

Trovare:

- la lista L1 che descrive il procedimento per dedurre **s** conoscendo **w**;
- la lista L2 che descrive il procedimento per dedurre **s** conoscendo **x** e **q**;
- il numero N1 di modi diversi per dedurre **p** conoscendo **y**.
- il numero N2 di modi diversi per dedurre **s** conoscendo **y** e **w**.

L1	
L2	
N1	
N2	

**SOLUZIONE**

L1	[12,1,10,5]
L2	[7,9,11]
N1	2
N2	6

**COMMENTI ALLA SOLUZIONE**

Per rispondere alle prime due domande conviene usare il metodo *bottom-up* e partire dai dati: si costruiscono rapidamente i due (unici) processi richiesti: [12,1,10,5] e [7,9,11] rispettivamente.

Analogamente, per la terza domanda, usando il metodo bottom-up si vede che si possono applicare 2 regole a partire dal dato ( $y$ ): la regola 3 e la regola 8; ciascuna di queste individua un unico procedimento per dedurre  $p$ : rispettivamente  $[3,4,2]$  e  $[8,7]$ .

Per la quarta domanda si vede che dai dati si possono applicare le regole 3 e 8 (che hanno  $y$  in premessa) e la regola 12 (che ha  $w$  in premessa). Partendo da ciascuna delle prime due si ottiene un unico procedimento:  $[3,4,2,8,6,9,11]$  e  $[8,6,7,9,11]$  rispettivamente.

Partendo dalla regola 12, invece, si ottengono i 4 procedimenti seguenti:

$[12,1,10,5]$

$[12,1,8,6,9,11]$

$[12,8,7,10,5]$

$[12,3,4,2,10,5]$

In totale quindi 6 procedimenti.

## ESERCIZIO 2

## PROBLEMA

In un deposito di minerali esistono esemplari di vario peso e valore individuati da sigle di riconoscimento. Ciascun minerale è descritto da un termine che contiene le seguenti informazioni:

deposito(<sigla del minerale>, <valore in euro>, <peso in Kg>).

Il deposito contiene i seguenti minerali:

minerale(m1,59,89)	minerale(m2,53,86)	minerale(m3,58,83)
minerale(m4,56,85)	minerale(m5,54,82)	minerale(m6,55,84)
minerale(m7,57,87)	minerale(m8,59,88)	minerale(m9,52,89)

Rispondere alle seguenti domande.

1. Disponendo di un autocarro con portata massima di 170 Kg, trovare la lista L1 delle sigle di 2 minerali (diversi) trasportabili con questo autocarro che consente di trasportare il massimo valore possibile.
2. Disponendo di un autocarro con portata massima di 250 Kg, trovare la lista L2 delle sigle di 3 minerali (diversi) trasportabili con questo autocarro che consente di trasportare il massimo valore possibile.
3. Disponendo di un autocarro con portata massima di 338 Kg, trovare la lista L3 delle sigle di 4 minerali (diversi) trasportabili con questo autocarro che consente di trasportare il massimo valore possibile.

N.B. Nelle liste, elencare le sigle in ordine crescente; per le sigle si ha il seguente ordine: m1<m2<... <m9.

L1	
L2	
L3	

## SOLUZIONE

L1	[m3,m7]
L2	[m3,m4,m5]
L3	[m3,m4,m5,m8]

## COMMENTI ALLA SOLUZIONE

In generale, un metodo per risolvere il problema (detto della *forza bruta*) è quello di generare tutte le combinazioni di 2, di 3 e di 4 minerali presi tra i nove del deposito, calcolarne peso e valore e scegliere, tra quelle trasportabili, quella che ha valore maggiore; le combinazioni, sotto forma di liste, sono le seguenti.

N.B. Di seguito a ciascuna combinazione, è indicato il valore e il peso complessivi.

[m1,m2]	[112,175]	[m1,m7]	[116,176]	[m2,m5]	[107,168]
[m1,m3]	[117,172]	[m1,m8]	[118,177]	[m2,m6]	[108,170]
[m1,m4]	[115,174]	[m1,m9]	[111,178]	[m2,m7]	[110,173]
[m1,m5]	[113,171]	[m2,m3]	[111,169]	[m2,m8]	[112,174]
[m1,m6]	[114,173]	[m2,m4]	[109,171]	[m2,m9]	[105,175]



[m3,m4]	[114,168]	[m4,m6]	[111,169]	[m5,m9]	[106,171]
[m3,m5]	[112,165]	[m4,m7]	[113,172]	[m6,m7]	[112,171]
[m3,m6]	[113,167]	[m4,m8]	[115,173]	[m6,m8]	[114,172]
[m3,m7]	[115,170]	[m4,m9]	[108,174]	[m6,m9]	[107,173]
[m3,m8]	[117,171]	[m5,m6]	[109,166]	[m7,m8]	[116,175]
[m3,m9]	[110,172]	[m5,m7]	[111,169]	[m7,m9]	[109,176]
[m4,m5]	[110,167]	[m5,m8]	[113,170]	[m8,m9]	[111,177]

Soluzione per la prima domanda: [m3,m7]

[m1,m2,m3][170,258]	[m2,m3,m4][167,254]	[m3,m5,m8][171,253]
[m1,m2,m4][168,260]	[m2,m3,m5][165,251]	[m3,m5,m9][164,254]
[m1,m2,m5][166,257]	[m2,m3,m6][166,253]	[m3,m6,m7][170,254]
[m1,m2,m6][167,259]	[m2,m3,m7][168,256]	[m3,m6,m8][172,255]
[m1,m2,m7][169,262]	[m2,m3,m8][170,257]	[m3,m6,m9][165,256]
[m1,m2,m8][171,263]	[m2,m3,m9][163,258]	[m3,m7,m8][174,258]
[m1,m2,m9][164,264]	[m2,m4,m5][163,253]	[m3,m7,m9][167,259]
[m1,m3,m4][173,257]	[m2,m4,m6][164,255]	[m3,m8,m9][169,260]
[m1,m3,m5][171,254]	[m2,m4,m7][166,258]	[m4,m5,m6][165,251]
[m1,m3,m6][172,256]	[m2,m4,m8][168,259]	[m4,m5,m7][167,254]
[m1,m3,m7][174,259]	[m2,m4,m9][161,260]	[m4,m5,m8][169,255]
[m1,m3,m8][176,260]	[m2,m5,m6][162,252]	[m4,m5,m9][162,256]
[m1,m3,m9][169,261]	[m2,m5,m7][164,255]	[m4,m6,m7][168,256]
[m1,m4,m5][169,256]	[m2,m5,m8][166,256]	[m4,m6,m8][170,257]
[m1,m4,m6][170,258]	[m2,m5,m9][159,257]	[m4,m6,m9][163,258]
[m1,m4,m7][172,261]	[m2,m6,m7][165,257]	[m4,m7,m8][172,260]
[m1,m4,m8][174,262]	[m2,m6,m8][167,258]	[m4,m7,m9][165,261]
[m1,m4,m9][167,263]	[m2,m6,m9][160,259]	[m4,m8,m9][167,262]
[m1,m5,m6][168,255]	[m2,m7,m8][169,261]	[m5,m6,m7][166,253]
[m1,m5,m7][170,258]	[m2,m7,m9][162,262]	[m5,m6,m8][168,254]
[m1,m5,m8][172,259]	[m2,m8,m9][164,263]	[m5,m6,m9][161,255]
[m1,m5,m9][165,260]	[m3,m4,m5][168,250]	[m5,m7,m8][170,257]
[m1,m6,m7][171,260]	[m3,m4,m6][169,252]	[m5,m7,m9][163,258]
[m1,m6,m8][173,261]	[m3,m4,m7][171,255]	[m5,m8,m9][165,259]
[m1,m6,m9][166,262]	[m3,m4,m8][173,256]	[m6,m7,m8][171,259]
[m1,m7,m8][175,264]	[m3,m4,m9][166,257]	[m6,m7,m9][164,260]
[m1,m7,m9][168,265]	[m3,m5,m6][167,249]	[m6,m8,m9][166,261]
[m1,m8,m9][170,266]	[m3,m5,m7][169,252]	[m7,m8,m9][168,264]

Soluzione per la seconda domanda: [m3,m4,m5]

[m1,m2,m3,m4][226,343]	[m1,m2,m3,m9][222,347]	[m1,m2,m4,m9][220,349]
[m1,m2,m3,m5][224,340]	[m1,m2,m4,m5][222,342]	[m1,m2,m5,m6][221,341]
[m1,m2,m3,m6][225,342]	[m1,m2,m4,m6][223,344]	[m1,m2,m5,m7][223,344]
[m1,m2,m3,m7][227,345]	[m1,m2,m4,m7][225,347]	[m1,m2,m5,m8][225,345]
[m1,m2,m3,m8][229,346]	[m1,m2,m4,m8][227,348]	[m1,m2,m5,m9][218,346]



[m1,m2,m6,m7][224,346]  
 [m1,m2,m6,m8][226,347]  
 [m1,m2,m6,m9][219,348]  
 [m1,m2,m7,m8][228,350]  
 [m1,m2,m7,m9][221,351]  
 [m1,m2,m8,m9][223,352]  
 [m1,m3,m4,m5][227,339]  
 [m1,m3,m4,m6][228,341]  
 [m1,m3,m4,m7][230,344]  
 [m1,m3,m4,m8][232,345]  
 [m1,m3,m4,m9][225,346]  
 [m1,m3,m5,m6][226,338]  
 [m1,m3,m5,m7][228,341]  
 [m1,m3,m5,m8][230,342]  
 [m1,m3,m5,m9][223,343]  
 [m1,m3,m6,m7][229,343]  
 [m1,m3,m6,m8][231,344]  
 [m1,m3,m6,m9][224,345]  
 [m1,m3,m7,m8][233,347]  
 [m1,m3,m7,m9][226,348]  
 [m1,m3,m8,m9][228,349]  
 [m1,m4,m5,m6][224,340]  
 [m1,m4,m5,m7][226,343]  
 [m1,m4,m5,m8][228,344]  
 [m1,m4,m5,m9][221,345]  
 [m1,m4,m6,m7][227,345]  
 [m1,m4,m6,m8][229,346]  
 [m1,m4,m6,m9][222,347]  
 [m1,m4,m7,m8][231,349]  
 [m1,m4,m7,m9][224,350]  
 [m1,m4,m8,m9][226,351]  
 [m1,m5,m6,m7][225,342]  
 [m1,m5,m6,m8][227,343]  
 [m1,m5,m6,m9][220,344]  
 [m1,m5,m7,m8][229,346]  
 [m1,m5,m7,m9][222,347]  
 [m1,m5,m8,m9][224,348]  
 [m1,m6,m7,m8][230,348]  
 [m1,m6,m7,m9][223,349]  
 [m1,m6,m8,m9][225,350]  
 [m1,m7,m8,m9][227,353]  
 [m2,m3,m4,m5][221,336]  
 [m2,m3,m4,m6][222,338]  
 [m2,m3,m4,m7][224,341]  
 [m2,m3,m4,m8][226,342]  
 [m2,m3,m4,m9][219,343]  
 [m2,m3,m5,m6][220,335]  
 [m2,m3,m5,m7][222,338]

[m2,m3,m5,m8][224,339]  
 [m2,m3,m5,m9][217,340]  
 [m2,m3,m6,m7][223,340]  
 [m2,m3,m6,m8][225,341]  
 [m2,m3,m6,m9][218,342]  
 [m2,m3,m7,m8][227,344]  
 [m2,m3,m7,m9][220,345]  
 [m2,m3,m8,m9][222,346]  
 [m2,m4,m5,m6][218,337]  
 [m2,m4,m5,m7][220,340]  
 [m2,m4,m5,m8][222,341]  
 [m2,m4,m5,m9][215,342]  
 [m2,m4,m6,m7][221,342]  
 [m2,m4,m6,m8][223,343]  
 [m2,m4,m6,m9][216,344]  
 [m2,m4,m7,m8][225,346]  
 [m2,m4,m7,m9][218,347]  
 [m2,m4,m8,m9][220,348]  
 [m2,m5,m6,m7][219,339]  
 [m2,m5,m6,m8][221,340]  
 [m2,m5,m6,m9][214,341]  
 [m2,m5,m7,m8][223,343]  
 [m2,m5,m7,m9][216,344]  
 [m2,m5,m8,m9][218,345]  
 [m2,m6,m7,m8][224,345]  
 [m2,m6,m7,m9][217,346]  
 [m2,m6,m8,m9][219,347]  
 [m2,m7,m8,m9][221,350]  
 [m3,m4,m5,m6][223,334]  
 [m3,m4,m5,m7][225,337]  
 [m3,m4,m5,m8][227,338]  
 [m3,m4,m5,m9][220,339]  
 [m3,m4,m6,m7][226,339]  
 [m3,m4,m6,m8][228,340]  
 [m3,m4,m6,m9][221,341]  
 [m3,m4,m7,m8][230,343]  
 [m3,m4,m7,m9][223,344]  
 [m3,m4,m8,m9][225,345]  
 [m3,m5,m6,m7][224,336]  
 [m3,m5,m6,m8][226,337]  
 [m3,m5,m6,m9][219,338]  
 [m3,m5,m7,m8][228,340]  
 [m3,m5,m7,m9][221,341]  
 [m3,m5,m8,m9][223,342]  
 [m3,m6,m7,m8][229,342]  
 [m3,m6,m7,m9][222,343]  
 [m3,m6,m8,m9][224,344]  
 [m3,m7,m8,m9][226,347]

[m4,m5,m6,m7][222,338]  
 [m4,m5,m6,m8][224,339]  
 [m4,m5,m6,m9][217,340]  
 [m4,m5,m7,m8][226,342]  
 [m4,m5,m7,m9][219,343]  
 [m4,m5,m8,m9][221,344]  
 [m4,m6,m7,m8][227,344]  
 [m4,m6,m7,m9][220,345]  
 [m4,m6,m8,m9][222,346]  
 [m4,m7,m8,m9][224,349]  
 [m5,m6,m7,m8][225,341]  
 [m5,m6,m7,m9][218,342]  
 [m5,m6,m8,m9][220,343]  
 [m5,m7,m8,m9][222,346]  
 [m6,m7,m8,m9][223,348]

Soluzione per la terza domanda: [m3,m4,m5,m8]

Naturalmente per generare ed esaminare tutte le combinazioni è opportuno scrivere un programma. In alternativa si può cercare di procedere per via euristica.



ESERCIZIO 3

PROBLEMA

A customer who intends to purchase an appliance has three coupons, only one of which may be used:

- Coupon 1: 10% off the listed price if the listed price is at least \$50,
- Coupon 2: \$20 off the listed price if the listed price is at least \$100,
- Coupon 3: 18% off the amount by which the listed price exceeds \$100.

The customer is interested in the following items:

APPLIANCE	LISTED PRICE
A	\$179.95
B	\$199.95
C	\$219.95
D	\$239.95
E	\$259.95

For which appliance will coupon 1 offer the best price reduction? Put your answer, as a capital letter, in the box below.

SOLUZIONE

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

If  $P$  is the price in dollars, coupon 1 deducts  $0.1 \times P$ , coupon 2 deducts \$20, and coupon 3 deducts  $0.18 \times (P - \$100)$ .

So

$$0.1 \times P > \$20$$

$$0.1 \times P > 0.18 \times (P - \$100)$$

Which gives

$$P > \$200$$

$$\$18 > 0.08 \times P$$

That is

$$\$200 < P < \$225$$

Alternatively, one can fill a table as the following (in which values are truncated, where needed).

APPLIANCE	LISTED PRICE	DEDUCTION BY		
		COUPON 1	COUPON 2	COUPON 3
A	\$179.95	\$17.99	\$20.00	\$14.39
B	\$199.95	\$19.99	\$20.00	\$17.99
C	\$219.95	\$21.99	\$20.00	\$21.59
D	\$239.95	\$23.99	\$20.00	\$25.19
E	\$259.95	\$25.99	\$20.00	\$28.79

ESERCIZIO 4

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura PROVA1.

```

procedure PROVA1;
variables A, B, C, K integer;
input A, B;
for K = 1 to 8 step 1 do
    if A < B then C ← A; output C, K; input A; input B; endif;
    if A > B then C ← B; output C, K; input A; input B; endif;
endfor;
endprocedure;
    
```

I valori di input per A sono: 4, 5, 4, 3, 6, 1, 1, ... e per B sono: 5, 6, 2, 7, 5, 1, 1, ...  
 N.B. I valori in input per entrambe le variabili sono uguale a 1 dopo i primi 5.

Determinare la lista LC che contiene nell'ordine i valori di output di C e la lista LK che contiene nell'ordine i valori in output per K.

LC	
LK	

SOLUZIONE

LC	[4,5,2,3,5]
LK	[1,2,2,3,3]

COMMENTO ALLA SOLUZIONE

La seguente tabella riporta i valori in input e output delle variabili durante le ripetizioni del ciclo "for".

	valore di C in output	valore di K in output	valore di A in input	valore di B in input
prima del "for"			4	5
prima ripetizione	4	1	5	6
seconda ripetizione	5	2	4	2
	2	2	3	7
terza ripetizione	3	3	6	5
	5	3	1	1
quarta ripetizione				
quinta ripetizione				
sesta ripetizione				
settima ripetizione				
ottava ripetizione				

Durante la seconda e la terza ripetizione vengono effettuati due output e due input; durante le ripetizioni successive non vengono effettuate operazioni di input e output.

N.B. Naturalmente, in un caso del genere, si può scrivere ed eseguire un programma che riproduca il comportamento della procedura appena vista.

ESERCIZIO 5

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura PROVA2.

N.B. Le variabili di tipo float hanno valore razionale; le costanti di tipo float si scrivono col punto e almeno una cifra decimale. Il calcolo delle espressioni float deve essere fatto con (almeno) 6 cifre decimali (dopo la virgola) esatte; in una espressione float possono comparire variabili intere.

```

procedura PROVA2;
variables K integer; A, B, C float;
A ← 0.0;
B ← 1.0;
K ← 0;
while A<B do
    K ← K +1;
    C ← A;
    A ← A + B × K / 20.0;
    B ← B - C × K / 20.0;
endwhile;
output K;
endprocedura;
    
```

Determinare il valore di output per K..

K	
---	--

SOLUZIONE

K	6
---	---

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Alla fine del corpo del ciclo “while” le variabili K, A, B e C assumono i valori riportati nella tabella seguente.

K	A	B	C
1	0.05	1.0	0.0
2	0.15	0.995	0.05
3	0.29925	0.9725	0.15
4	0.49375	0.91265	0.29925
5	0.7219125	0.7892125	0.49375
6	0.95867625	0.57263875	0.7219125

Il ciclo “while” è ripetuto 6 volte.

N.B. Naturalmente, in un caso del genere, si può scrivere ed eseguire un programma che riproduca il comportamento della procedura appena vista.

ESERCIZIO 6

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura PROVA3.

N.B. Le variabili di tipo float hanno valore razionale; le costanti di tipo float si scrivono col punto e almeno una cifra decimale. Il calcolo delle espressioni float deve essere fatto con (almeno) 6 cifre decimali (dopo la virgola) esatte; in una espressione float possono comparire variabili intere.

```

procedure PROVA3;
variables K integer; A, B float;
input A;
input B;
K ← 0;
while A>B do
    K ← K +1;
    A ← A - 1.0/K;
endwhile;
output K;
endprocedure;
    
```

Se il valore di input per A è 3.0 e quello per B è 0.1, calcolare il valore di output per K.

K	
---	--

SOLUZIONE

K	10
---	----

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

I valori di K e di A, alla fine del corpo del ciclo “while” sono mostrati nella seguente tabella.

K	A
1	2.0
2	1.5
3	1.1666666666666667
4	0.9166666666666667
5	0.7166666666666667
6	0.5500000000000000
7	0.4071428571428573
8	0.2821428571428573
9	0.1710317460317462
10	0.0710317460317462

Il ciclo “while” è ripetuto 10 volte.

N.B. Naturalmente, in un caso del genere, si può scrivere ed eseguire un programma che riproduca il comportamento della procedura appena vista.

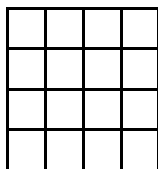
ESERCIZIO 7

PROBLEMA

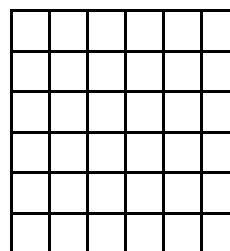
Considerare con attenzione le seguenti tre figure.



A1



A2



A3

Calcolare quanti quadrati, Q1, Q2, Q3 compaiono (in tutto) rispettivamente in A1, A2 e A3.

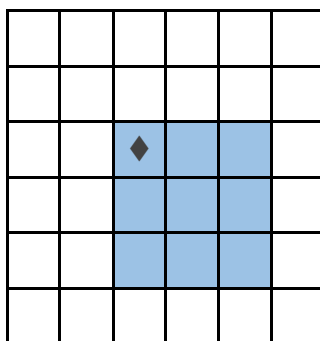
Q1	
Q2	
Q3	

SOLUZIONE

Q1	5
Q2	30
Q3	91

COMMENTO ALLA SOLUZIONE

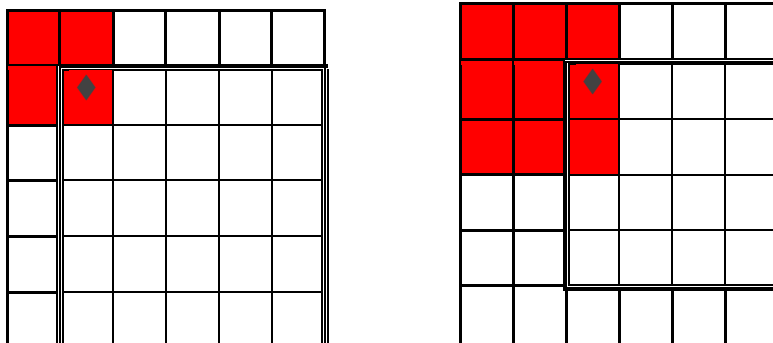
Si consideri la seguente illustrazione: un quadrato di lato 6 (come A3).



Si può pensare di *individuare* un quadrato di lato assegnato, per esempio 3 (quello evidenziato in azzurro) interamente contenuto nella figura grande, con la casella che costituisce l'angolo superiore sinistro (marcata da una losanga nera in figura) detta talvolta (in inglese) *leading box*.

Si vede allora immediatamente che, *nella precedente illustrazione*, di quadrati di lato 6 ne compare uno solo, quello *individuato* dalla prima casella in alto a sinistra.

È quindi ovvio che di quadrati di lato 5 ne compaiono esattamente 4: perché 4 sono le caselle, (evidenziate in rosso nella illustrazione seguente, a sinistra) che possono contenere la casella che individua un quadrato di lato 5 il quale sia interamente contenuto nella figura "grande".



Analogamente si vede che di quadrati di lato 4 ne compaiono esattamente 9: perché 9 sono le caselle, (evidenziate in rosso nella illustrazione precedente, a destra) che possono contenere il *leading box* di un quadrato di lato 4 che sia interamente contenuto nella figura, e così via; in particolare di quadrati di lato 1 ce ne sono tanti quante sono le caselle della figura “grande” di partenza.

Generalizzando si può concludere che: per contare quante volte un quadrato (di lato assegnato uguale a un multiplo di una lunghezza elementare) compare in una *data figura* (composta di quadrati elementari) basta contare quante sono le posizioni occupabili dal *leading box* di quel quadrato; se la figura data è, a sua volta, un quadrato di lato  $k$ , allora il numero (complessivo) di quadrati (di lato qualunque) interamente contenuti è la somma (delle aree) dei quadrati di lato da 1 a  $k$  (occupabili dal *leading box* di quadrati di lato rispettivamente  $k, k-1, k-2, \dots, 1$ ):

$$\sum_{j=1}^k j^2$$

Così si può rispondere alle tre domande poste dal problema.

In A1 ci possono stare solo quadrati di lato 1 oppure 2:

$$Q1 = (\text{numero di quadrati di lato 2}) + (\text{numero di quadrati di lato 1}) = 1 + 4 = 5$$

In A2 ci possono stare quadrati di lato 1, oppure 2, oppure 3, oppure 4:

$$Q2 = (\text{numero di quadrati di lato 4}) + (\text{numero di quadrati di lato 3}) + \\ (\text{numero di quadrati di lato 2}) + (\text{numero di quadrati di lato 1}) = \\ 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

In A3: ci possono stare quadrati di lato 1, oppure 2, oppure 3, oppure 4, oppure 5, oppure 6:

$$Q3 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

ESERCIZIO 8

PROBLEMA

In the first tournament of a problem solving (individual) competition, the average score of a group of students (some coming from school A and some from school B) was 80 (over a maximum of 100). If the students from school A averaged 75 and the students from school B averaged 90, what is the ratio RAB of the number of students from A to the number of students from B?

In the next tournament, students from school C joined; the average total score was 85, and students from C scored an average of 95, while students from A and B maintained their overall score. What is the ratio RCB of the number of newcomers from the school C to the number of students from B?

Put your answers as number with two decimal digit (and “.” as decimal mark) in the boxes below.

RAB	
RCB	

SOLUZIONE

RAB	2.00
RCB	1.50

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per la prima parte, se si indicano con SA e SB quanti sono gli studenti che vengono rispettivamente dalla scuole A e B, si ha:

$$80(SA + SB) = 75SA + 90SB$$

$$5SA = 10SB \Rightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{10}{5} = 2$$

Quindi il numero di partecipanti alla prima gara è stato di 3SB.

Per la seconda parte, se si indica con SC il numero di studenti dalla nuova scuola, si ha:

$$85(3SB + SC) = 80(3SB) + 95SC$$

$$255SB + 85SC = 240SB + 95SC$$

$$15SB = 10SC \Rightarrow \frac{SC}{SB} = 1.50$$