

ESERCIZIO 1

PREMESSA

Per risolvere problemi spesso esistono delle regole che, dai dati del problema, permettono di calcolare o *dedurre* la soluzione. Questa situazione si può descrivere col termine

regola(<sigla>,<lista antecedenti>,<conseguente>)

che indica una regola di nome <sigla> che consente di dedurre <conseguente> conoscendo tutti gli elementi contenuti nella <lista antecedenti>, detta anche *premessa*. Problemi “facili” possono essere risolti con una sola regola; per problemi “difficili” una sola regola non basta a risolverli, ma occorre applicarne diverse in successione.

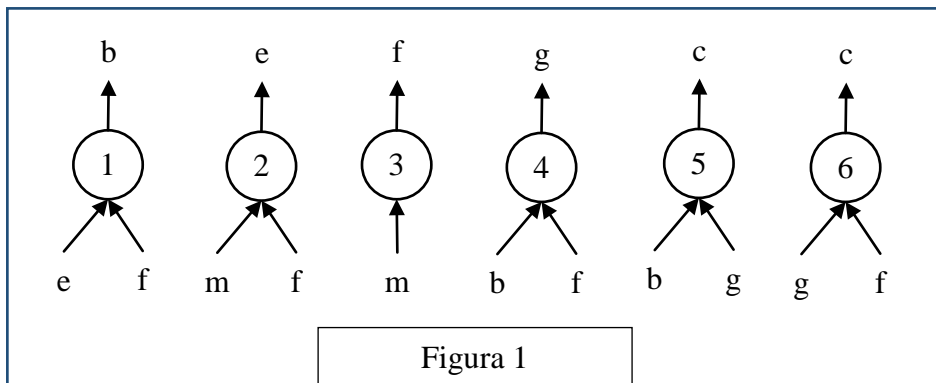
Si considerino le seguenti regole:

regola(1,[e,f],b)      regola(2,[m,f],e)      regola(3,[m],f)  
 regola(4,[b,f],g)      regola(5,[b,g],c)      regola(6,[g,f],c)

Per esempio la regola 1 dice che si può calcolare (o dedurre) **b** conoscendo **e** ed **f** (cioè gli elementi della lista [e,f]); conoscendo **b** ed **f** (cioè gli elementi della lista [b,f]) è possibile dedurre **g** con la regola 4. Quindi, a partire da **e** ed **f** è possibile dedurre prima **b** (con la regola 1) e poi **g** (con la regola 4).

Un *procedimento di deduzione* (o deduttivo, o di calcolo) è rappresentato da un *insieme di regole da applicare in sequenza opportuna* per dedurre un certo elemento (incognito) a partire da certi dati: quindi può essere descritto dalla lista delle sigle di queste regole. Il procedimento [1,4] descrive la soluzione del problema: “dedurre **g** a partire da **e** ed **f**”.

Una maniera grafica per rappresentare le regole è quella mostrata nella seguente figura 1: consiste nell’associare un albero (rovesciato) ad ogni regola: la radice (in alto) è il conseguente, le foglie (in basso) sono gli antecedenti.

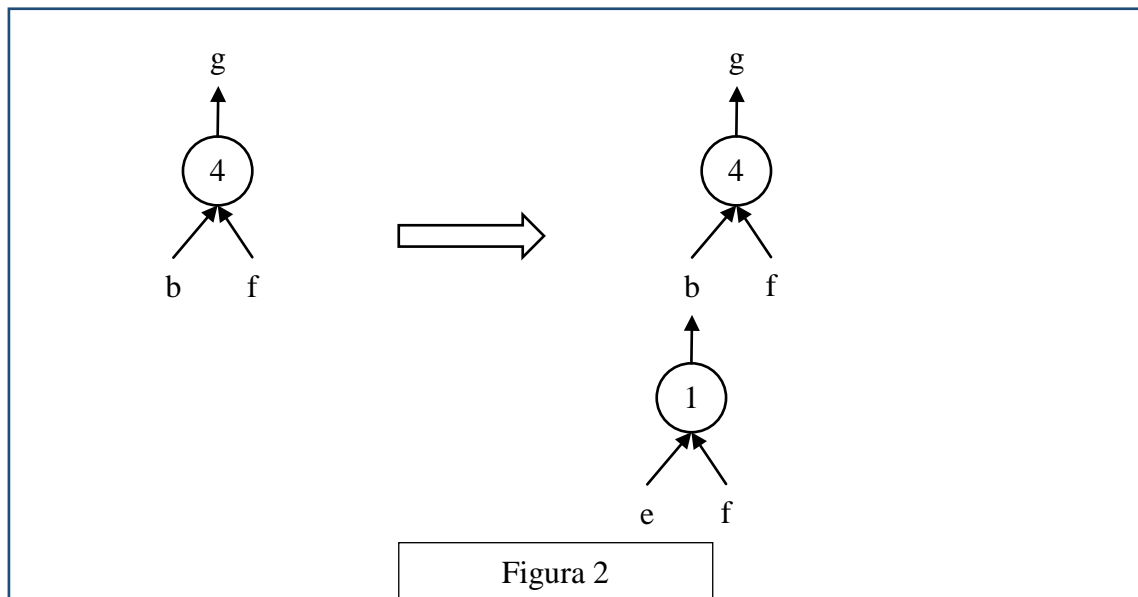


Con questa rappresentazione grafica, risolvere il problema “dedurre **g** a partire da **e** ed **f**” è particolarmente facile; si cerca un “albero” (cioè una regola) che ha come radice l’incognita (cioè **g**): in questo caso ne esiste solo uno che è la regola 4: si veda la figura 2 a sinistra.

Le foglie di questo albero (**b** ed **f**) *non* sono tutte note: quelle note (**f** in questo caso) sono vere e proprie foglie, quelle incognite (**b** in questo caso) vanno considerati come “anelli” a cui “appendere” un altro albero; quindi bisogna continuare *sviluppando* la foglia incognita **b**, cioè “appendendo” a **b** l’albero rappresentato dalla regola 1, come illustrato nella figura 2 a destra.

Adesso tutte le foglie dell’albero così ottenuto (**e** ed **f**) sono note e il problema è risolto.

Si può anche dire che un albero le cui foglie sono tutte note rappresenta un procedimento per dedurre la “radice” a partire dalle “foglie”. Per costruire la lista corrispondente occorre *partire dal basso*: prima si applica la regola 1, che utilizza solo i dati; poi si può applicare la regola 4. Il procedimento è quindi (individuato dalla lista) [1,4].

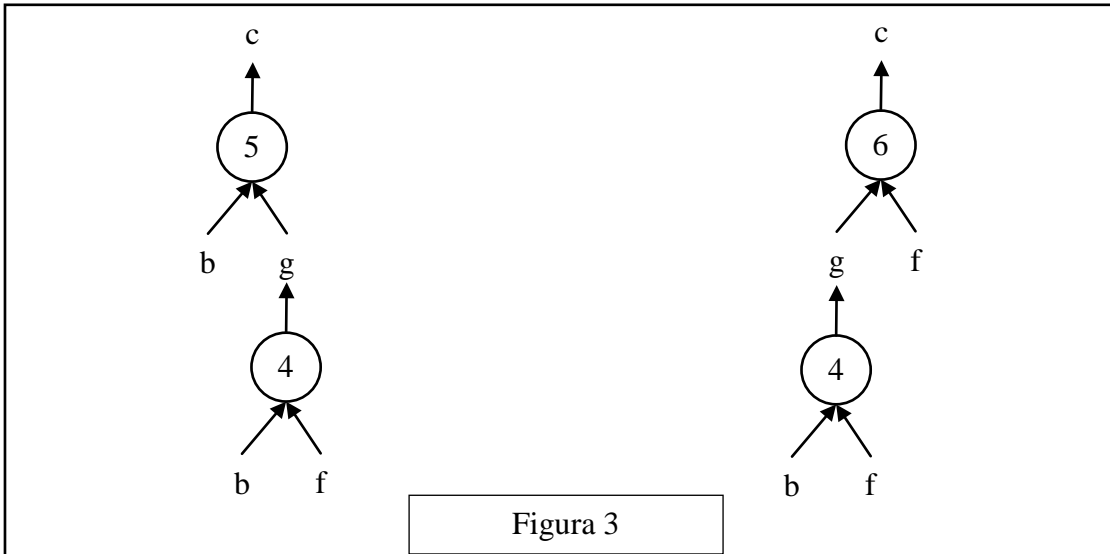


N.B. Nella lista non ci sono regole *ripetute*: infatti un procedimento di deduzione è un *insieme* di regole da applicare in opportuna sequenza. L'applicazione di una regola rende disponibile il conseguente da utilizzare (come antecedente) nell'applicazione di regole successive.

Nelle liste richieste le sigle delle regole sono elencate nell'ordine che corrisponde alla sequenza di applicazione: la prima (a sinistra) della lista deve essere la sigla che corrisponde alla prima regola da applicare (che ha come antecedenti solo dati); l'ultima (a destra) deve essere la sigla della regola che ha come conseguente l'elemento incognito da dedurre.

Per rendere unica la lista associata a un ben preciso procedimento (cioè a un ben preciso insieme di regole), si costruisce tale lista per passi successivi a partire dal primo elemento che è la sigla della prima regola da applicare; ad ogni passo, se ci fossero più regole applicabili, *per quel procedimento*, occorre dare la precedenza (nella lista) alla regola con sigla *inferiore*.

N.B. In alcuni casi esistono più procedimenti deduttivi possibili che permettono di ricavare un certo elemento dagli stessi dati in maniere diverse (cioè con *insiemi diversi di regole* e quindi con alberi diversi). Per esempio il problema “dedurre **c** a partire da **b** ed **f**” (dalle regole viste sopra) ha due distinti procedimenti risolutivi; gli alberi relativi ai due procedimenti sono mostrati nella seguente figura 3.



Le liste associate sono, rispettivamente, [4,5] e [4,6].

In un procedimento deduttivo, il numero di regole *differenti* coinvolte (e, quindi, anche il numero di elementi della lista corrispondente al procedimento) si dice *lunghezza* del procedimento.

**PROBLEMA**

Siano date le seguenti regole:

- |                   |                     |                     |
|-------------------|---------------------|---------------------|
| regola(1,[p,x],r) | regola(2,[a,p,w],f) | regola(3,[p,q,r],s) |
| regola(4,[w],a)   | regola(5,[f],s)     | regola(6,[q,w],x)   |
| regola(7,[q],p)   | regola(8,[y],q)     | regola(9,[a,w],p)   |

Trovare:

1. la lista L1 che descrive il procedimento per dedurre s conoscendo w;
2. la lista L2 che descrive il procedimento per dedurre s conoscendo x e q;
3. il numero N di procedimenti diversi per dedurre s conoscendo y e w.

L1	
L2	
N	

**SOLUZIONE**

L1	[4,9,2,5]
L2	[7,1,3]
N	4

**COMMENTI ALLA SOLUZIONE**

Si vede immediatamente che l'incognita s (comune alle tre domande) si può ottenere da due regole: la 3 e la 5.

Per la seconda domanda è una buona ipotesi procedere *top-down* e partire dalla regola 3 che ha come antecedente un dato (q); infatti degli altri antecedenti, p, è deducibile da q (dato) con la regola 7, mentre r è deducibile da p (appena dedotto) e x (dato) con la regola 1: il procedimento è quindi [7,1,3].

Per la prima domanda, in cui sono noti  $x$  e  $q$ , conviene procedere *bottom-up* e partire dal dato. Da  $w$ , con la regola 4 (l'unica applicabile) si può dedurre  $a$ ; poi da  $a$  e  $w$  si può dedurre  $p$  con la regola 9 e da  $a$ ,  $p$  e  $w$  con la regola 2 si può dedurre  $f$ . Si può applicare infine la regola 5: il procedimento è quindi [4,9,2,5].

Anche per la terza domanda è conveniente usare il metodo *bottom-up*: a partire dai dati sono applicabili (in alternativa) la regola 4 e la regola 8. Ovviamente partendo con la regola 4 si ottiene il procedimento trovato rispondendo alla prima domanda ([4,9,2,5]), ma anche [4,8,6,9,1,3] e [4,8,7,2,5]; partendo invece dalla regola 8 si ottiene solamente [8,6,7,1,3]. In totale 4 procedimenti.

## ESERCIZIO 2

## PREMESSA

In un deposito di minerali esistono esemplari di vario peso e valore individuati da sigle di riconoscimento. Ciascun minerale è descritto da un termine che contiene le seguenti informazioni.

tab(<sigla del minerale>, <valore in euro>, <peso in Kg>).

Il deposito contiene i minerali descritti dai seguenti termini:

tab(m1,67,176)	tab(m2,65,163)	tab(m3,68,180)
tab(m4,64,168)	tab(m5,66,169)	tab(m6,68,178)

## PROBLEMA

Disponendo di un motocarro con portata massima di 340 Kg, trovare la lista L1 delle sigle di due minerali diversi che siano trasportabili contemporaneamente con questo mezzo e che abbiano il massimo valore complessivo.

Disponendo di un secondo motocarro con portata massima di 360 Kg, trovare la lista L2 delle sigle di due minerali diversi che siano trasportabili contemporaneamente con questo mezzo e che abbiano il massimo valore complessivo.

N.B. Nelle liste, elencare le sigle in ordine (lessicale) crescente; per le sigle usate si ha il seguente ordine: m1<m2<m3<... .

L1	
L2	

## SOLUZIONE

L1	[m1,m2]
L2	[m3,m6]

## COMMENTI ALLA SOLUZIONE

In generale, in problemi di questo tipo, occorre applicare il *metodo della forza bruta*: considerare *tutte* le possibili *combinazioni* di due (o tre) minerali diversi, il loro valore e il loro peso.

N.B. Le *combinazioni* corrispondono ai sottoinsiemi: cioè sono indipendenti dall'ordine; per esempio la combinazione “m1, m4” è uguale alla combinazione “m4, m1”. Quindi per elencarle tutte (una sola volta) conviene costruirle sotto forma di liste i cui elementi sono ordinati come richiesto dal problema.

Costruite le combinazioni, occorre individuare quelle trasportabili da ciascun motocarro e tra queste scegliere quella di valore opportuno.

In questo problema però si può fare di meglio (cioè risolverlo più rapidamente). Si elenchino i minerali in ordine crescente di peso.

m2	65	163
m4	64	168
m5	66	169
m1	67	176
m6	67	178
m3	68	180

Per la prima domanda, si vede immediatamente che sono trasportabili solo le coppie di minerali scelti tra i primi 3 e la coppia m2, m1. È facile scegliere tra queste 4 coppie quella di maggior valore: [m1,m2].

Per la seconda domanda, è immediato osservare che tutte le coppie di minerali sono trasportabili: quindi basta scegliere quella di valore maggiore.

ESERCIZIO 3

PROBLEMA

On a certain day, *The Duckville Gazette* listed the length of daylight as 10 hours and 24 minutes, the sunrise as 6:57 AM, and the sunset as 8:15 PM. The length of daylight and sunrise were correct, but the sunset was wrong. When did the sun really set?

Put your answer in the frame below, with the following rules:

- the first and third fields should be filled with two digits (e.g. 11 or 03);
- the last field can contain only: AM or PM;
- the second field is already filled.

	:		
--	---	--	--

SOLUZIONE

05	:	21	PM
----	---	----	----

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

First, consider the hours.

$$6 + 10 = 16 \text{ which is } 4:00 \text{ PM.}$$

Then consider the minutes.

$$57 + 24 = 81 \text{ which is } 1:21$$

Adding the two results one gets 5:21 PM that has to be put in the frame according the given rules.

ESERCIZIO 4

PROBLEMA

Compresa la sequenza dei calcoli descritti nella seguente procedura PROVA1, eseguire le operazioni indicate.

```

procedure PROVA1;
variables A, B, C, K integer;
for K = 1 to 8 step 1 do
  input A, B;
  if A < B then C ← A; output C; endif;
  if A > B then C ← B; output C; endif;
endfor;
endprocedure;
  
```

I valori di input per A sono 1, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 8 e per B sono 1, 2, 4, 4, 5, 7, 8, 9.  
 Determinare la lista L che contiene nell'ordine i valori di output.

L	
---	--

SOLUZIONE

L	[2,3,5,6,8]
---	-------------

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Tra i corrispondenti valori di A e B viene messo in output il valore più piccolo, a meno che non siano uguali: in questo caso vengono ignorati.

valori per A	1, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 8
valori per B	1, 2, 4, 4, 5, 7, 8, 9
valori in output	2, 3, 5, 6, 8

ESERCIZIO 5

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura PROVA2.

```

procedure PROVA2;
variables A, B, M, N, K, J integer;
input A;
M ← 0;
N ← 0;
J ← 0;
for K = 1 to 8 step 1 do
    input B;
    if A < B then M ← M+1; endif;
    if A > B then N ← N+1; endif;
    if A = B then J ← J + 1; endif;
endfor;
output M, N, J;
endprocedure;
    
```

I valori di input per A è 10 e per B sono 17, 14, 8, 10, 18, 9, 12, 6.

Determinare i valori di output.

M	
N	
J	

SOLUZIONE

M	4
N	3
J	1

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

La procedura conta quanti degli 8 valori di B sono maggiori di quello di A (in M) quanti sono minori (in N) e quanti uguali (in J).



ESERCIZIO 6

PROBLEMA

Si consideri la seguente procedura PROVA3.

```

procedura PROVA3;
variables M, N, K integer;
M ← 1;
N ← 1;
for K = 1 to 5 step 1 do
    M ← M + N + 1;
    N ← M + N + 1;
endfor;
output M, N;
endprocedura;
    
```

Determinare i valori di output per M e N..

M	
N	

SOLUZIONE

M	177
N	287

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Nella seguente tabella sono riportati i valori di K, M e N alla fine di ogni ripetizione del corpo del ciclo “for”.

K	M	N
1	3	5
2	9	15
3	25	41
4	67	109
5	177	287

ESERCIZIO 7

PROBLEMA

Un robot si muove in un campo di gara che ha dimensioni 3×5, alternando una mossa *tipo re* con una mossa *tipo cavallo*.

N.B. Si ricorda che il re, da una casella, si può muovere solo nelle *otto* caselle adiacenti.

Nel campo sono presenti delle caselle interdette descritte dalla seguente lista:

[[1,1],[1,2],[1,3],[2,4],[2,5],[3,2],[3,1],[3,4]].

Sono presenti, inoltre, dei premi descritti dalla seguente lista:

[[2,1,12],[2,3,13],[1,4,5],[3,3,9]].

Partendo dalla casella [2,2], il robot deve arrivare in [3,5]. Trovare la lista L corrispondente al percorso semplice (cioè senza passare più volte in una stessa casella) in cui si raccoglie il massimo di premi.

L

SOLUZIONE

L

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Il campo di gara è mostrato nella figura seguente.

	■	
5	■	■
■	13	9
■	□	■
■	12	■

Per raccogliere il premio 12, la prima mossa è obbligata: infatti il robot non può tornare in [2,2] (deve fare percorsi semplici) e se arriva in [2,1] da [3,3] non può più tornare indietro. Le altre mosse sono praticamente tutte obbligate.

## ESERCIZIO 8

## PROBLEMA

Alice can paint a fence in 90 minutes by herself while it takes Bob one hour to paint the same fence alone. If Alice and Bob work together, how long will it take them to paint the fence?

Now suppose that they work together for 10 minutes, and then Alice leaves to attend a Problem Solving class; how long will it take Bob to finish the job?

Enter your answer in the boxes below as minutes and seconds, separated by a semicolon (e.g. 15:00 or 56:43).

Alice and Bob working together	
Bob alone, after 10 minutes of work with Alice	

## SOLUZIONE

Alice and Bob working together	36:00
Bob alone, after 10 minutes of work with Alice	43:20

## COMMENTO ALLA SOLUZIONE

In one minute Alice and Bob paint  $\frac{1}{90}$ th and  $\frac{1}{60}$ th of the fence, respectively; working together in one minute, they paint

$$\frac{1}{90} + \frac{1}{60} = \frac{2+3}{180} = \frac{5}{180} = \frac{1}{36}$$

of the fence, so it takes them 36 minutes to finish.

Working together for ten minutes they paint  $\frac{10}{36}$  of the fence; to finish the remaining  $\frac{26}{36}$ , it will take Bob

$$\frac{26}{36} \div \frac{1}{60} = \frac{26}{36} \times 60 = \frac{26}{3} \times 5 = \frac{130}{3} = \frac{129+1}{3} = 43 + \frac{1}{3}$$

minutes, which is 43:20 in minute and seconds.