

ESERCIZIO 1

PREMESSA

La relazione che lega il costo totale conoscendo quello unitario e il numero di oggetti acquistati può essere rappresentata col termine regola(<sigla>,[costo unitario, quantità], <costo totale>). Più in generale, con il termine

regola(<Sigla>,<Lista antecedenti>,<Consequente>,<Peso>)

si può descrivere ogni regola di deduzione che consente di dedurre <Consequente> conoscendo tutti gli elementi contenuti nella <Lista antecedenti>; ogni regola è identificata in modo univoco da <Sigla> e da un <Peso> che misura la difficoltà di applicazione di quella regola (per esempio, basso per una somma, più alto per una divisione). Un procedimento di deduzione o di calcolo è rappresentato da un elenco di regole da applicare e quindi può essere descritto dalla lista delle sigle ad esse corrispondenti. Ad ogni procedimento può essere associato un peso complessivo dato dalla somma dei pesi delle singole regole che lo compongono.

PROBLEMA

È dato il seguente insieme di regole (in cui il nome del termine è “rs” invece di “regola”):

rs(1,[c1,c2],i,12)	rs(2,[c1,i],c2,7)	rs(3,[c2,i],c1,7)	rs(4,[i,h],a,7)
rs(5,[a,h],i,7)	rs(6,[i,a],h,7)	rs(7,[c1,c2],a,12)	rs(8,[c1,a],c2,12)
rs(9,[c2,a],c1,12)	rs(10,[c1,p1],h,7)	rs(11,[c1,h],p1,7)	rs(12,[p1,h],c1,7)
rs(13,[p1,p2],h,8)	rs(14,[h,p1],p2,7)	rs(15,[p2,h],p1,7)	rs(16,[c2,p2],h,7)
rs(17,[c2,h],p2,7)	rs(18,[p2,h],c2,7)		

Si osserva che, conoscendo [c1,c2], è possibile dedurre i con la regola 1 e a con la regola 7; ma è anche possibile dedurre h con la regola 6 dopo aver applicato prima la regola 1 (per dedurre i), poi la regola 7 (per dedurre a). Quindi, la lista [1,7,6] descrive il procedimento per dedurre h conoscendo [c1,c2].

N.B. Quando due regole possono essere applicate in sequenza e non importa l'ordine, nel procedimento si applichi prima quella con la sigla di valore più basso.

Utilizzando le regole sopra riportate, trovare il numero N di procedimenti possibili per dedurre a conoscendo [p1,p2]. Elencare in ordine crescente nella lista L i pesi di ciascuno di questi procedimenti.

N	
L	

SOLUZIONE

N	2
L	[34,41]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Per risolvere il problema si può usare il metodo *backward* (o *top down*) che consiste nel partire dalla incognita e cercare di individuare una regola (o più regole alternative) per derivarla. Se esiste una regola le cui premesse sono tutte note ( per esempio i dati) la soluzione è trovata, altrimenti si continua per derivare i termini incogniti; il metodo è illustrato nella prima figura seguente, in cui le frecce non tratteggiate (di tipo OR) indicano le regole (la sigla è scritta a fianco, seguita dal peso) e le frecce tratteggiate (di tipo AND) indicano gli antecedenti della regola; in questo caso si ottengono due alberi (le cui foglie sono note: o dati o elementi già calcolati) che rappresentano due procedimenti.

Un altro metodo è quello *forward* (o *bottom up*) che consiste nel partire dai dati e usare le regole applicabili per aumentare la conoscenza via via fino a comprendere l'incognita; il metodo è illustrato nella seconda figura seguente; anche in questo caso, naturalmente, si ottengono due sottoalberi.

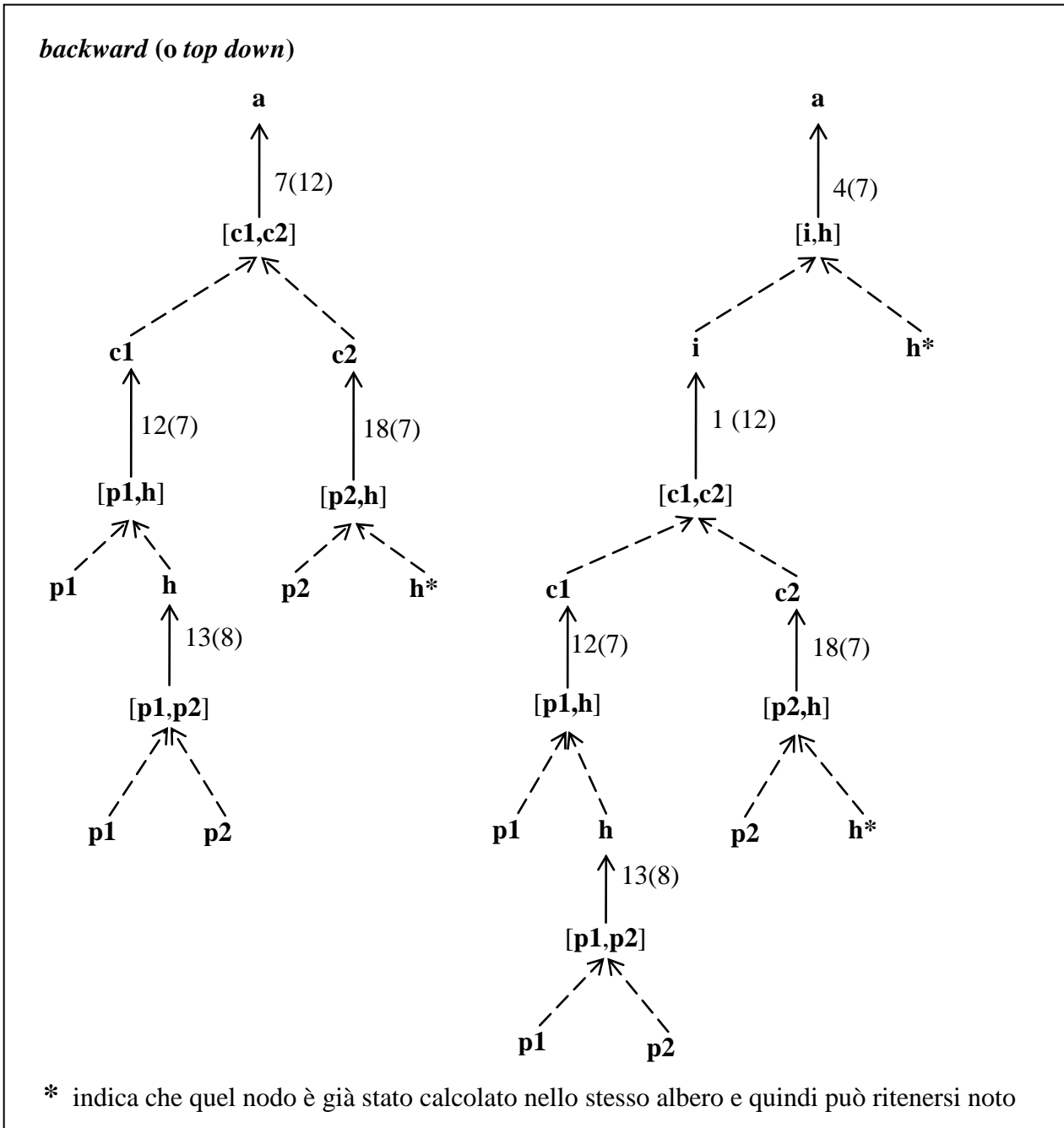
N.B. Nel primo caso la successione delle regole applicate è dal basso verso l'alto; nel secondo caso è dall'alto al basso.

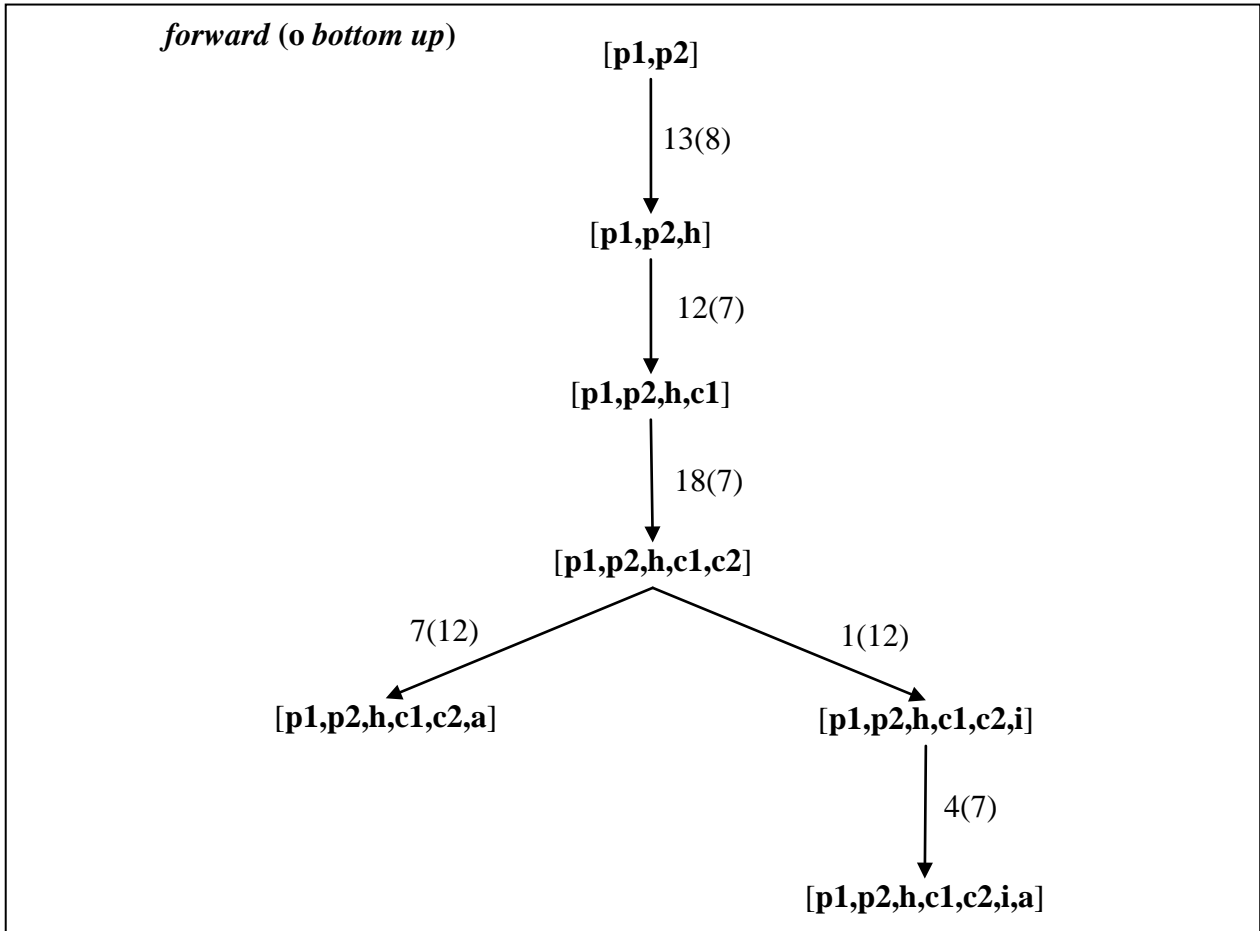
I procedimenti sono:

[13,12,18,7] di peso 34,

[13,12,18,1,4] di peso 41.

N.B. Per le convenzioni del problema l'applicazione della regola 12 *deve* precedere l'applicazione della regola 18.





ESERCIZIO 2

PREMESSA

In un foglio a quadretti è disegnato un campo di gara, per esempio di 14 quadretti in orizzontale e 5 in verticale (vedi figura).

									S				
					P								
→													

Ogni casella può essere individuata da due numeri (interi); per esempio la casella contenente P è individuata da essere nella sesta colonna (da sinistra) e nella terza riga (dal basso): brevemente si dice che ha *coordinate* [6,3]; la prima coordinata (in questo caso 6) si dice *ascissa* e la seconda (in questo caso 3) si dice *ordinata*. Le coordinate della casella contenente S sono [10,4] e di quella contenente la freccia sono [1,1].

La freccia può essere pensata come un robot, in questo caso rivolto verso destra; il robot può eseguire tre tipi di comandi:

- girarsi di 90 gradi in senso *orario*: comando o;
- girarsi di 90 gradi in senso *antiorario*: comando a;
- avanzare di una casella (nel senso della freccia, mantenendo l'orientamento): comando f.

Questi comandi possono essere concatenati in sequenze in modo da permettere al robot di compiere vari percorsi; per esempio la sequenza di comandi descritta dalla lista [f,f,f,f,f,a,f,f] fa spostare il robot dalla posizione e orientamento iniziali mostrati in figura fino alla casella P; risultato analogo si ottiene con la lista [a,f,f,o,f,f,f,f,f]. Tuttavia, nel primo caso l'orientamento finale del robot è verso l'alto, mentre nel secondo caso l'orientamento finale è verso destra. Il robot ha sempre uno dei quattro orientamenti seguenti descritti con: n (nord, verso l'alto), s (sud, verso il basso), e (est, verso destra), o (ovest, verso sinistra).

N.B. Non confondere "o" come descrizione dell'orientamento e "o" come comando.

PROBLEMA

In un campo di gara sufficientemente ampio si trovano due robot (A e B) che devono compiere due percorsi così definiti:

robot A: coordinate della partenza [4,4], direzione n, lista dei comandi:

[f,f,f,o,f,a,f,o,f,a,f,o,f,f,f,o,f,f,f,f].

robot B: coordinate della partenza [2,3], direzione n, lista dei comandi:

[f,o,f,a,f,o,f,f,f,f,a,f,f,f,o,f,f,f].

Determinare la lista L della caselle in cui i due percorsi si incrociano.

N.B. quanto segue:

1. una casella si indica con la lista delle sue due coordinate: per esempio [3,4] oppure [11,7];
2. L può essere la lista vuota ([]: vuol dire che i percorsi non si incrociano);
3. L può essere la lista di un solo elemento (per esempio [[4,5]]) o la lista di due elementi (per esempio [[3,4],[9,6]]) o la lista di più elementi;
4. se L ha due o più elementi questi devono comparire in ordine crescente di ascissa; a parità di ascissa, in ordine crescente di ordinata.

L

## SOLUZIONE

L	[[4,5],[9,8]]
---	---------------

## COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Il percorso dei robot si può ottenere disegnandolo o, in maniera più sistematica, compilando due tabelle come le seguenti.

<b>robot A</b>			
	<b>ascissa</b>	<b>ordinata</b>	<b>orient.</b>
<b>posizione</b>	4	4	n
<b>comando 1,2,3</b>	f,f,f		
<b>posizione</b>	4	7	n
<b>comando 4</b>	o		
<b>posizione</b>	4	7	e
<b>comando 5</b>	f		
<b>posizione</b>	5	7	e
<b>comando 6</b>	a		
<b>posizione</b>	5	7	n
<b>comando 7</b>	f		
<b>posizione</b>	5	8	n
<b>comando 8</b>	o		
<b>posizione</b>	5	8	e
<b>comando 9</b>	f		
<b>posizione</b>	6	8	e
<b>comando 10</b>	a		
<b>posizione</b>	6	8	n
<b>comando 11</b>	f		
<b>posizione</b>	6	9	n
<b>comando 12</b>	o		
<b>posizione</b>	6	9	e
<b>comando 13,14,15</b>	f,f,f		
<b>posizione</b>	9	9	e
<b>comando 16</b>	o		
<b>posizione</b>	9	9	s
<b>comando 17,18,19,20</b>	f,f,f,f		
<b>posizione</b>	9	5	o

<b>robot B</b>			
	<b>ascissa</b>	<b>ordinata</b>	<b>orient.</b>
<b>posizione</b>	2	3	n
<b>comando 1</b>	f		
<b>posizione</b>	2	4	n
<b>comando 2</b>	o		
<b>posizione</b>	2	4	e
<b>comando 3</b>	f		
<b>posizione</b>	3	4	e
<b>comando 4</b>	a		
<b>posizione</b>	3	4	n

<b>comando 5</b>	f		
<b>posizione</b>	3	5	n
<b>comando 6</b>	o		
<b>posizione</b>	3	5	e
<b>comando 7,8,9,10,11</b>	f,f,f,f,f		
<b>posizione</b>	8	5	e
<b>comando 12</b>	a		
<b>posizione</b>	8	5	n
<b>comando 13,14,15</b>	f,f,f		
<b>posizione</b>	8	8	n
<b>comando 16</b>	o		
<b>posizione</b>	8	8	e
<b>comando 17,18,19</b>	f,f,f		
<b>posizione</b>	11	8	e

N.B. Per economia di spazio e perché facilmente eseguibili, comandi successivi uguali sono stati “accorpati”.

Ricapitolando i due percorsi sono:

[[2,3],[2,4],[3,4],[3,5],[4,5],[5,5],[6,5],[7,5],[8,5],[8,6],[8,7],[8,8],[9,8],[10,8],[11,8],]

[[4,4],[4,5],[4,6],[4,7],[5,7],[5,8],[6,8],[6,9],[7,9],[8,9],[9,9],[9,8],[9,7],[9,6],[9,5]]

È facile vedere che (solamente) [4,5] e [9,8] appartengono a entrambe i percorsi.

## ESERCIZIO 3

## PROBLEMA

Nel seguente testo sostituire a X1, X2, X3, ecc. la parola più appropriata, scelta tra quelle proposte. (N.B. solo una scelta è *coerente* col significato generale del testo, anche se altre sono sintatticamente possibili; per svolgere l'esercizio non è necessario conoscere l'argomento trattato nel brano).

Nondimeno l'X1 su cui si basava l'opera di Desargues era l'incarnazione della semplicità; era un'idea ricavata dalla prospettiva degli artisti del Rinascimento e dal principio di continuità di Keplero. Tutti sanno che un X2, se guardato di sbieco, presenta l'aspetto di un'ellisse, o che il contorno dell'ombra di un paralume sarà un cerchio o un'iperbole a seconda che sia proiettata sul soffitto o su una X3. Forme e dimensioni mutano a seconda del piano di incidenza che taglia il X4 dei raggi visivi o dei raggi luminosi; ma alcune proprietà restano immutate attraverso questi cambiamenti, e sono appunto tali proprietà che Desargues si mise a X5. Innanzitutto, una sezione X6 rimane una sezione X6 qualunque sia il numero di proiezioni cui venga sottoposta. Le coniche formano una famiglia molto compatta, come aveva suggerito Keplero per ragioni un po' diverse.

Lista delle scelte:

- |                  |              |
|------------------|--------------|
| A lastra         | M superficie |
| B idea           | N vedere     |
| C quadrato       | O cono       |
| D azione         | P parete     |
| E cerchio        | Q sbieca     |
| F organizzazione | R riflettere |
| G inclinata      | S prisma     |
| H segmento       | T conica     |
| I cilindro       | U studiare   |
| L guardare       | V origine    |

Indicare le scelte con la lettera maiuscola corrispondente.

X1	
X2	
X3	
X4	
X5	
X6	

## SOLUZIONE

X1	B
X2	E
X3	P
X4	O
X5	U
X6	T

## COMMENTI ALLA SOLUZIONE

<b>Variabile</b>	<b>Presumibili proprietà grammaticali o sintattiche</b>	<b>Scelte possibili</b>	<b>Scelta corretta</b>
X1	sostantivo iniziante per vocale	idea, azione, organizzazione, origine	idea (più naturale nel contesto)
X2	sostantivo maschile	quadrato, cerchio, segmento, cono, prisma, cilindro,	cerchio (unica scelta coerente col contesto)
X3	sostantivo femminile	lastra, parete, superficie	parete (dal contesto deve essere verticale e contrapposta a soffitto)
X4	sostantivo maschile	quadrato, cerchio, segmento, cono, prisma, cilindro	cono (unica scelta naturale nel contesto: deve essere coerente con X6)
X5	verbo all'infinito	guardare, studiare, vedere, riflettere	studiare (più naturale nel contesto)
X6	aggettivo femminile	sbieca, conica, inclinata	conica (deve riguardare X4 e deve essere coerente col periodo successivo)



ESERCIZIO 4

PREMESSA

In un foglio a quadretti è disegnato un campo di gara di dimensioni 14x5 (14 quadretti in orizzontale e 5 in verticale, vedi figura).

		Q												
		5	■	■		■			S					
			7	P										
		1												
♠				.										

Ogni casella può essere individuata da due numeri (interi); per esempio la casella contenente P è individuata da essere nella quinta colonna (da sinistra) e nella terza riga (dal basso): brevemente si dice che ha *coordinate* [5,3]; la prima coordinata (in questo caso 5) si dice *ascissa* e la seconda (in questo caso 3) si dice *ordinata*. Le coordinate della casella contenente S sono [10,4] e di quella contenente il robot ♠ sono [1,1].

Il robot si muove a passi e ad ogni passo (o mossa) può spostarsi solo in una delle caselle contenenti ♠ come illustrato nella seguente figura (allo stesso modo del cavallo nel gioco degli scacchi).

	♠		♠	
♠				♠
		♠		
♠				♠
	♠		♠	

Il campo di gara contiene caselle interdette al robot (segnate da un quadrato nero) quindi, tenuto conto anche dei bordi del campo di gara, la mobilità del robot può essere limitata; ad esempio se il robot si trovasse nella casella in cui c'è Q si potrebbe spostare solo in 3 caselle; se fosse nella casella in cui c'è P avrebbe 7 mosse possibili; dalla casella [1,1] ha solo 2 mosse possibili. In alcune caselle sono posti dei premi che il robot può accumulare lungo un percorso. I premi sono descritti fornendo le coordinate della casella che lo contiene e il valore del premio: i premi sopra riportati sono descritti dalla seguente lista [[3,2,1],[4,3,7],[3,4,5]]. Un percorso del robot è descritto dalla lista delle coordinate delle caselle attraversate. Un possibile percorso da P a Q (che ha un totale di premi accumulati pari a 8) è descritto dalla seguente lista [[3,2],[5,1],[4,3],[3,5]].

PROBLEMA

In un campo di gara di dimensioni 4x4 il robot deve fare un percorso “chiuso” partendo dalla casella [3,3] e ritornando nella stessa; nel campo sono presenti le caselle interdette descritte dalla seguente lista:

[[1,1],[2,4],[1,4],[4,4],[4,1],[2,2]].

I premi distribuiti nel campo di gara sono descritti dalla seguente lista

[[1,3,3],[1,2,5],[3,4,4],[3,3,9],[3,2,6],[3,1,1]].

Trovare:

- il numero N di possibili percorsi diversi senza cicli (cioè tutte le caselle del percorso sono diverse, tranne la partenza e l'arrivo);

– la lista L dei pesi accumulati in questi percorsi, elencati in ordine non decrescente

N	
L	

SOLUZIONE

N	6
L	[9,14,15,15,22,22]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Il campo di gara è mostrato nello schema seguente:

■	■	4	■
3		9	
5	■	6	
■		1	■

I percorsi sono:

- [[3,3],[1,2],[3,1],[2,3],[4,2],[2,1],[3,3]], premio 15;
- [[3,3],[1,2],[3,1],[2,3],[4,2],[3,4],[1,3],[2,1],[3,3]], premio 22;
- [[3,3],[1,2],[3,3]], premio 14;
- [[3,3],[2,1],[4,2],[2,3],[3,1],[1,2],[3,3]], premio 15;
- [[3,3],[2,1],[3,3]], premio 9;
- [[3,3],[2,1],[1,3],[3,4],[4,2],[2,3],[3,1],[1,2],[3,3]], premio 22.

ESERCIZIO 5

PREMESSA

Alcuni ragazzi decidono di costruire un ipertesto multimediale sugli avvenimenti storici significativi della loro regione. Per organizzare il progetto, dividono il lavoro in singole attività e assegnano ogni attività a un gruppo di loro.

Le attività sono descritte col seguente termine

$a(\langle \text{sigla attività} \rangle, \langle \text{durata in giorni} \rangle, \langle \text{ragazzi impegnati} \rangle)$ ;

esempio, il termine  $a(A1,1,6)$  significa che l'attività A1 dura un giorno e impiega 6 ragazzi.

Le attività non possono svolgersi tutte contemporaneamente, ma devono essere rispettate delle priorità descritte con termini del tipo

$p(\langle \text{precedente} \rangle, \langle \text{successiva} \rangle)$ ;

come per esempio  $p(A4,A8)$  e  $p(A6,A8)$ ; ogni termine esprime il fatto che l'attività associata alla sigla di destra (detta successiva) può iniziare solo quando l'attività associata alla sigla di sinistra (detta precedente) è terminata. Ovviamente se una attività ha più precedenti, può iniziare solo quando *tutte* le precedenti sono terminate; i due termini appena visti implicano che l'attività A8 può iniziare solo dopo che sono terminate le due attività A4 e A6.

PROBLEMA.

Le attività di questo progetto sono descritte nella seguente lista

$[a(A1,1,6), a(A2,2,4), a(A3,3,3), a(A4,2,1), a(A5,2,1), a(A6,2,6), a(A7,2,3), a(A8,2,6), a(A9,2,5), a(A10,1,4), a(A11,1,3), a(A12,1,8), a(A13,2,7), a(A14,2,1), a(A15,1,9)]$ .

Le priorità sono descritte dalla seguente lista

$[p(A1,A2), p(A1,A3), p(A2,A4), p(A2,A5), p(A3,A6), p(A3,A7), p(A4,A8), p(A5,A8), p(A5,A9), p(A6,A12), p(A7,A11), p(A7,A10), p(A9,A12), p(A6,A13), p(A11,A14), p(A10,A14), p(A13,A15), p(A12,A15), p(A3,A5), p(A8,A9), p(A14,A15)]$ .

Trovare il numero minimo N di giorni necessari per completare il progetto, tenuto presente che alcune attività possono essere svolte in parallelo e che ogni attività deve iniziare prima possibile (nel rispetto delle priorità). Inoltre trovare:

1. il numero T1 del giorno in cui lavora il maggior numero RM di ragazzi;
2. il numero T2 del giorno in cui lavora il minor numero Rm di ragazzi;
3. il numero massimo PM di attività che possono essere svolte in parallelo;
4. il numero medio RG di ragazzi che ha lavorato giornalmente durante il progetto (con due cifre decimali arrotondate dopo la virgola).

N	
T1	
RM	
T2	
Rm	
PM	
RG	

SOLUZIONE

N	12
T1	7
RM	20
T2	4
Rm	4
PM	4

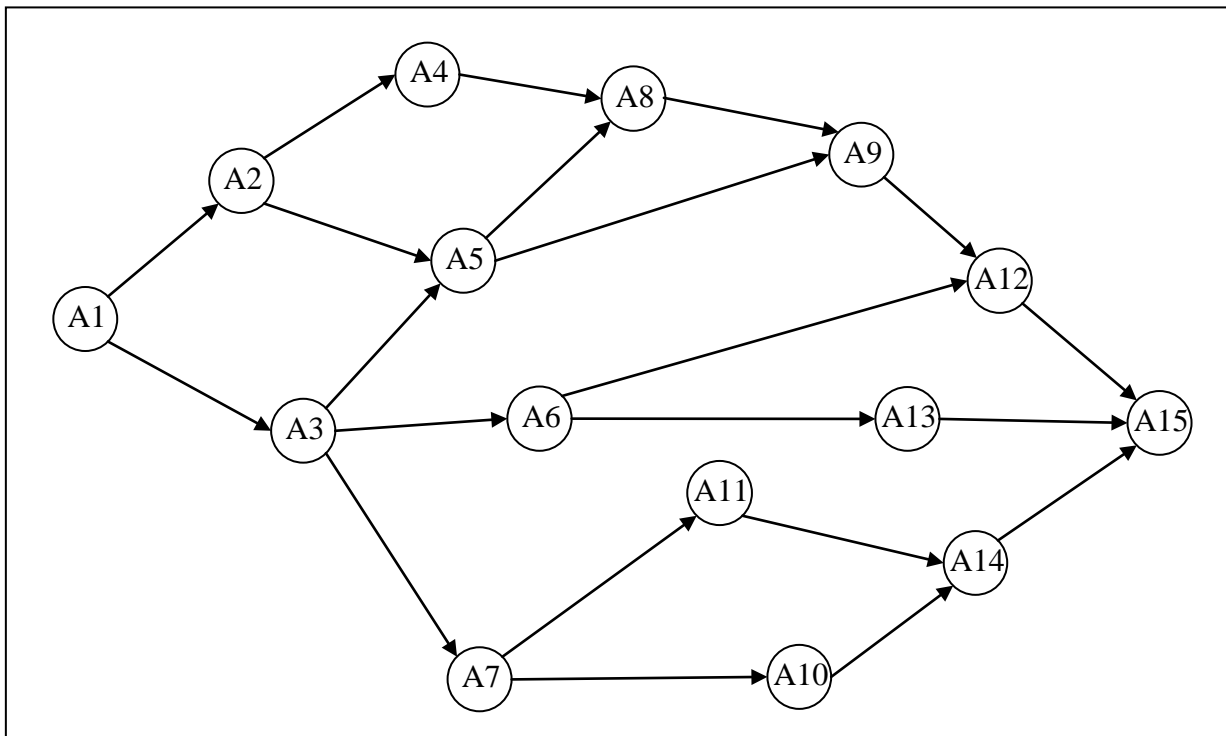
RG 8,92

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

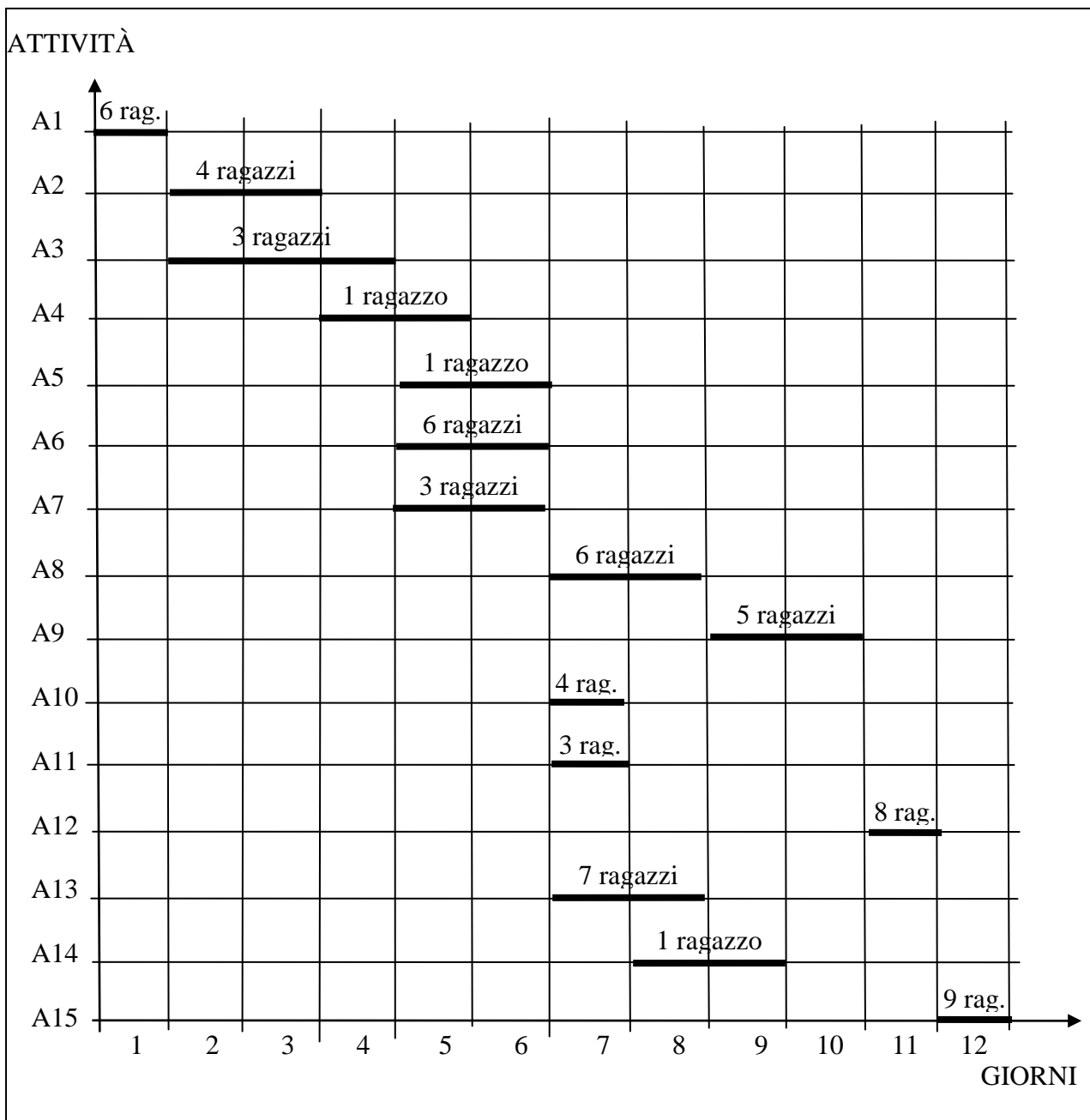
Per facilitare la soluzione è utile trasformare in tabella la lista che descrive la durata e le persone relative ad ogni attività.

Attività	Durata	Ragazzi
A1	1	6
A2	2	4
A3	3	3
A4	2	1
A5	2	1
A6	2	6
A7	2	3
A8	2	6
A9	2	5
A10	1	4
A11	1	3
A12	1	8
A13	2	7
A14	2	1
A15	1	9

Successivamente è bene disegnare il diagramma delle precedenze.



Da ultimo si deve compilare il Gantt.



N.B. I giorni sono numerati a partire dal primo del progetto.

Dal Gantt si deduce facilmente la lista delle coppie [giorno,persone]:

[[1,6],[2,7],[3,7],[4,4] ,[5,11],[6,10],[7,20] ,[8,14] ,[9,6],[10,5],[11,8] ,[12,9]].

Da tale lista viene immediatamente la soluzione: N vale 12; T1 vale 7 e RM vale 20; T2 vale 4 e Rm vale 4; il numero massimo di attività che si possono svolgere in parallelo è 4. Il numero di “giornate×ragazzo” è

$$6+7+7+4+11+10+20+14+6+5+8+9 = 107$$

Dividendo tale risultato per la durata del progetto si ottiene  $RG = 107/12 = 8,91\bar{6} = 8,92$ .

ESERCIZIO 6

PROBLEMA

Compresa la sequenza dei calcoli descritti nella procedura seguente, eseguire le operazioni indicate utilizzando i dati di input sotto riportati e trovare i valori di output.

```

procedura PROVA1;
variables C, Q, R, S, I integer;
input C;
Q ← 0;
R ← 1;
S ← 0;
for I from 1 to C step 1 do
    S ← S+I×I;
    Q ← Q+I+I;
    R ← R+S×Q;
endfor;
output Q, R, S;
endprocedura;
    
```

Completare le seguenti tabelle.

valore di input per C	4
valore di output per Q	
valore di output per R	
valore di output per S	

valore di input per C	7
valore di output per Q	
valore di output per R	
valore di output per S	

SOLUZIONE

valore di input per C	4
valore di output per Q	20
valore di output per R	801
valore di output per S	30

valore di input per C	7
valore di output per Q	56
valore di output per R	14113
valore di output per S	140

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Nel caso che l'input per C sia 7, il ciclo "for" viene ripetuto 7 volte; i valori delle variabili prima del ciclo e dopo ogni ripetizione sono riportati nella seguente tabella.

	C	I	Q	R	S
valori prima del ciclo "for"	7	/	0	1	0
valori dopo la ripetizione 1 del ciclo "for"	7	1	2	3	1

valori dopo la ripetizione 2 del ciclo "for"	7	2	6	33	5
valori dopo la ripetizione 3 del ciclo "for"	7	3	12	201	14
valori dopo la ripetizione 4 del ciclo "for"	7	4	20	801	30
valori dopo la ripetizione 5 del ciclo "for"	7	5	30	2451	55
valori dopo la ripetizione 6 del ciclo "for"	7	6	42	6273	91
valori dopo la ripetizione 7 del ciclo "for"	7	7	56	14113	140

N.B. La variabile I non ha valore prima del ciclo for" (come del resto le altre variabili all'inizio della procedura).

Nel caso che l'input per C sia 4, il ciclo "for" viene ripetuto 4 volte; i valori di output delle variabili si leggono nella precedente tabella quando il valore di I è 4.

ESERCIZIO 7

PROBLEMA

Compresa la sequenza dei calcoli descritti nella procedura seguente, eseguire le operazioni indicate utilizzando i dati di input sotto riportati e trovare i valori di output.

```

procedura PROVA2;
variables A[1:10], N, Q, R, S, I integer;
input A;
input N;
Q ← 0;
R ← 0;
S ← 1;
for I from 1 to N step 1 do
    Q ← I×A(I);
    R ← I+A(I);
    S ← S+Q×R;
endfor;
output Q, R, S;
endprocedura;
    
```

I valori in input per le componenti di A sono elencati nella seguente lista [3,-5,12,7,-4,-3,-2,8,4,10]; Calcolare i valori di output corrispondenti ai valori di input 5 e 9 per N, completando le seguenti tabelle.

valore di input per N	5
valore di output per Q	
valore di output per R	
valore di output per S	

valore di input per N	9
valore di output per Q	
valore di output per R	
valore di output per S	

SOLUZIONE

valore di input per N	5
valore di output per Q	-20
valore di output per R	1
valore di output per S	871

valore di input per N	9
valore di output per Q	36
valore di output per R	13
valore di output per S	2239

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

I valori delle 10 componenti del “vettore” A sono sempre quelli dei dieci elementi della lista data: A(1) vale 3, a(2) vale -5, A(3) vale 12, e così via. Nel caso che l’input per N sia 9, il ciclo “for” vie-



ne ripetuto 9 volte; i valori delle variabili prima del ciclo e dopo ogni ripetizione sono riportati nella seguente tabella.

	<b>N</b>	<b>I</b>	<b>Q</b>	<b>R</b>	<b>S</b>
valori prima del ciclo "for"	9	/	0	0	1
valori dopo la ripetizione 1 del ciclo "for"	9	1	3	4	13
valori dopo la ripetizione 2 del ciclo "for"	9	2	-10	-3	43
valori dopo la ripetizione 3 del ciclo "for"	9	3	36	15	583
valori dopo la ripetizione 4 del ciclo "for"	9	4	28	11	891
valori dopo la ripetizione 5 del ciclo "for"	9	5	-20	1	871
valori dopo la ripetizione 6 del ciclo "for"	9	6	-18	3	817
valori dopo la ripetizione 7 del ciclo "for"	9	7	-14	5	747
valori dopo la ripetizione 8 del ciclo "for"	9	8	64	16	1771
valori dopo la ripetizione 9 del ciclo "for"	9	9	36	13	2239

N.B. La variabile I non ha valore prima del ciclo "for" (come del resto le altre variabili all'inizio della procedura).

Nel caso che l'input per N sia 5, il ciclo "for" viene ripetuto 5 volte; i valori di output delle variabili si leggono nella precedente tabella quando il valore di I è 5.

## ESERCIZIO 8

## PROBLEMA

Si indichino con  $X$  e  $Y$  due numeri naturali minori di 10, o anche (per abuso di notazione) due cifre decimali. In quale anno  $19XY$  del secolo scorso una persona nata nel 1965 aveva un'età pari a  $X - Y$ ?

Si scrivano i valori che risolvono il problema nella tabella che segue.

X	
Y	

## SOLUZIONE

X	7
Y	1

## COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Poiché:

- $X \geq Y$  (infatti  $X - Y$  deve essere una età, quindi non negativa),
- $X \geq 6$  (infatti  $1900 + 10X + Y$ , o  $19XY$ , deve essere uguale o maggiore di 1965, ma minore di 1974),
- $0 \leq Y \leq X \leq 9$ , per i dati del problema e quindi  $6 \leq X \leq 9$ ,

si devono determinare  $X$  e  $Y$  in modo che (con i vincoli suddetti)  $10X + Y - 65 = X - Y$ , ovvero  $9X + 2Y = 65$ . Da cui si vede che  $X$  deve essere dispari (altrimenti il primo termine sarebbe pari); non può essere 9, perché  $9 \times 9 = 81 (>65)$ ; quindi  $X = 7$ , da cui  $2Y = 2$ , ovvero  $Y = 1$ .

(Oppure si può ragionare esaminando successivamente tutte le coppie  $[X, Y]$  che rispettano i vincoli:

$[6,5]$   $[6,6]$   $[7,0]$   $[7,1]$   $[7,2]$   $[7,3]$   $[7,4]$

La coppia  $[7,1]$  risolve il problema; infatti  $1971 - 1965 = 7 - 1$ .)

## APPROFONDIMENTO

Poiché, come detto, la differenza massima possibile tra due cifre è 9 e in ogni secolo c'è un (solo) anno che termina con 90, allora il precedente problema poteva essere formulato (e avere soluzione) riguardo una persona nata nel 1981.

Per controllare di aver capito il metodo di soluzione, determinare quanti sono gli anni *del '900* che possono essere sostituiti al 1965 nell'enunciato del problema. Per ogni scelta dell'anno di nascita, la soluzione se esiste è sempre unica?

ESERCIZIO 9

PROBLEMA

Determinare l'ultima cifra del numero (in notazione decimale)  $7^{25}$  e scriverla nel quadrato seguente.

SOLUZIONE

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Dopo un attimo di riflessione si può facilmente concludere che l'ultima cifra di un prodotto di due numeri (espressi in notazione posizionale, di base qualunque) è uguale all'ultima cifra del prodotto tra le ultime cifre (dei numeri dati).

In notazione decimale si ha la seguente "tabellina" delle moltiplicazioni (in cui è riempita solo la colonna del 7) che riporta solo l'ultima cifra (si può dire tabella di moltiplicazione *modulo 10*):

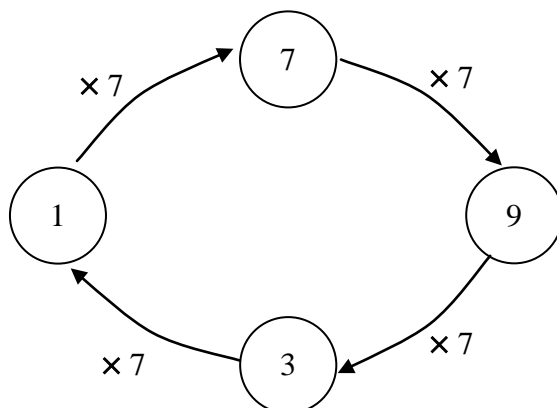
×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0								0		
1								7		
2								4		
3								1		
4								8		
5								5		
6								2		
7								9		
8								6		
9								3		

Si vede facilmente che, usando la tabella (cioè in aritmetica modulo 10), si ha:

$$\begin{aligned}
 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 &= (((7 \times 7) \times 7) \times 7) \times 7 \text{ (proprietà associativa)} \\
 &=_{10} (((9 \times 7) \times 7) \times 7) \text{ (calcolando la parentesi più interna)} \\
 &=_{10} ((3 \times 7) \times 7) \text{ " } \\
 &=_{10} (1 \times 7) \text{ " } \\
 &=_{10} 7.
 \end{aligned}$$

N.B. si è usato il simbolo " $=_{10}$ " (invece di "=") per intendere che l'uguaglianza riguarda solo l'ultima cifra.

Quindi l'ultima cifra di  $7^5$  è 7. Questo risultato si può descrivere col seguente diagramma, in cui le frecce indicano la moltiplicazione per 7:



Poiché  $7^{25} = (7^5)^5$ , l'ultima cifra è quella di  $(7)^5$  cioè ancora 7.

Ricapitolando: per risparmiare calcoli si è cercato, per tentativi successivi ( $7 \times 7$ ,  $7 \times 7 \times 7$ ,  $7 \times 7 \times 7 \times 7$ ,  $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ , ...) quale è il più piccolo esponente da dare a 7 per ottenere ancora 7. Dopo si è scomposto  $7^{25} = 7^5 \times 7^5 \times 7^5 \times 7^5 \times 7^5$ . Oppure ancora, si possono percorrere 24 frecce (cioè  $25 - 1$ ) del diagramma precedente, partendo dalla casella 7.

**APPROFONDIMENTO**

Se si chiedeva di trovare l'ultima cifra di  $7^{18}$ , occorre scomporre  $7^{18} = 7^5 \times 7^5 \times 7^5 \times 7 \times 7 \times 7 =_{10} 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =_{10} 7 \times 7 =_{10} 9$  (oppure si possono percorrere 17 frecce).

Per controllare di aver capito il metodo di soluzione, si risolva lo stesso problema per  $7^{25}$  scritto in notazione esadecimale.

N.B. Sia 7, sia 25 sono in notazione esadecimale.

La soluzione si può ottenere mediante i seguenti passi:

- scegliere sedici simboli per le cifre esadecimali; per esempio: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F;
- compilare una tabella della moltiplicazione modulo 16 (cioè che riporta solo l'ultima cifra) simile a quella precedente;
- ragionare per analogia con quanto fatto sopra.

## ESERCIZIO 10

## PROBLEMA

Let  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$  be the infinite series of natural numbers defined by the following two relations:

$$a_1 = 5$$

$$a_{n+1} = 2 a_n - 4$$

and let  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, b_{n+1}, \dots$  be the infinite series of natural numbers defined by the following two relations:

$$b_1 = 15$$

$$b_{n+1} = b_n + 2$$

Which is the least  $n$  for which  $a_n > b_n$ ? What are the values of  $a_n$  and  $b_n$  in correspondence of that  $n$ ? Put your answers in the following table.

n	
$a_n$	
$b_n$	

## SOLUZIONE

n	6
$a_n$	36
$b_n$	25

## COMMENTI ALLA SOLUZIONE

È immediato osservare che la prima successione ha il termine iniziale più piccolo della seconda, ma cresce “più rapidamente”; infatti i primi termini sono:

$$5, 6, 8, 12, 20, 36, 68, 132, \dots$$

I primi termini della seconda successione sono:

$$15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, \dots$$

Il “sorpasso” avviene al sesto termine.