ESERCIZIO 1 (C.) (ALBERI AND/OR)

PREMESSA
Con il termine

regola(<sigla>,<lista antecedenti>,<conseguente>,<peso>)

si può descrivere una *regola* (di deduzione) che consente di dedurre il *conseguente* conoscendo tutti gli elementi contenuti nella *lista degli antecedenti*; ogni regola è poi identificata in modo univoco da una sigla e ha un *peso*, che dà l’idea di quanto sia oneroso applicarla. Per esempio, dato il seguente insieme di regole:

regola(1,[c1,c2],i,12)	regola(2,[i,h],a,3)	regola(3,[h,p1],c1,2)
regola(4,[h,p2],c2,7)	regola(5,[c1,c2],a,4)	regola(6,[p1,p2],h,3)
regola(7,[p1,p2],i,2)	regola(8,[c1,i],c2,8)	regola(9,[i,a],h,6),

si osserva che, conoscendo gli elementi contenuti nella lista [p1,p2], è possibile dedurre (direttamente) h con la regola 6 e i con la regola 7; ma conoscendo [p1,p2] è anche possibile dedurre c1 applicando prima la regola 6 (per dedurre h) e poi la regola 3 (conoscendo ora [h,p1]). Si può quindi dire che la lista [6,3] rappresenta un procedimento per dedurre c1 da [p1,p2]; la lista contiene infatti l’indicazione delle regole che devono essere applicate. Per esempio, la lista [6,3,4,5] rappresenta un procedimento per calcolare a da [p1,p2]. Sommando i pesi delle regole applicate è possibile ottenere una *valutazione* del procedimento; pertanto, si può affermare che il procedimento [6,3,4,5] per dedurre a da [p1,p2] ha valutazione di 16.

PROBLEMA
È dato il seguente insieme di regole (in cui il nome del termine è “rs” invece di “regola”):

rs(1,[c1,c2],i,12)	rs(2,[c1,i],c2,7)	rs(3,[c2,i],c1,7)	rs(4,[i,h],a,7).
rs(5,[a,h],i,7)	rs(6,[i,a],h,7)	rs(7,[c1,c2],a,12)	rs(8,[c1,a],c2,12).
rs(9,[c2,a],c1,12)	rs(10,[c1,p1],h,7)	rs(11,[c1,h],p1,7)	rs(12,[p1,h],c1,7).
rs(13,[p1,p2],h,8)	rs(14,[h,p1],p2,7)	rs(15,[p2,h],p1,7)	rs(16,[c2,p2],h,7).
rs(17,[c2,h],p2,7)	rs(18,[p2,h],c2,7)	rs(19,[c1,p1],i,7)	rs(20,[c1,i],p1,7).
rs(21,[p1,i],c1,7)	rs(22,[c2,p2],i,7)	rs(23,[c2,i],p2,7)	rs(24,[p2,i],c2,7).
rs(25,[p1,p2],i,2)	rs(26,[i,p1],p2,2)	rs(27,[p2,h],p1,2).	

Dati gli elementi della lista [p1,h], trovare:

- il numero N di procedimenti di deduzione dell’elemento c2 che abbiano una valutazione minore di 22;
- tra questi procedimenti, trovare la lista L1 che descrive il procedimento di valutazione minima e la lista L2 che descrive il procedimento di valutazione massima.

N	
L1	
L2	

SOLUZIONE

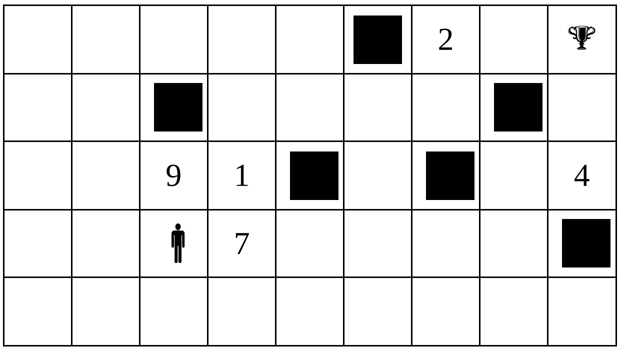
N	3
L1	[14,18]
L2	[12,19,2]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

?- qs(c2,[p1,h],D2,L2,K).
D2 = [c2, i, c1, p1, h], L2 = [2, 19, 12], K = 21 ;
D2 = [c2, p2, p1, h], L2 = [18, 14], K = 14 ;
D2 = [c2, i, p2, p1, h], L2 = [24, 25, 14], K = 16 ;

ESERCIZIO 2 (C.) (CACCIA AL TESORO)

PREMESSA
Un campo di gara per robot ha la forma di un foglio a quadretti o celle; le celle possono contenere ostacoli che impediscono al robot di attraversarle, oppure dei premi; una cella contiene un tesoro.



Con riferimento alla figura, il robot (indicato con una sagoma umana) si trova nella cella individuata dalle coordinate (3,2), terza colonna da sinistra e seconda riga dal basso. Il tesoro, rappresentato da una coppa, è nella cella (9,5); il campo contiene 6 ostacoli, individuati da un quadrato nero. I premi sono descritti da 3 numeri: i primi due individuano la cella e il terzo rappresenta il valore; in questo esempio i premi sono i seguenti: (4,2,7), (3,3,9), (4,3,1), (9,3,4), (7,5,2). Il robot può spostarsi di una cella verso destra o verso l’alto, cioè ad ogni passo solo una delle sue coordinate può aumentare di una unità. In questo esempio, il robot può raggiungere il tesoro solo attraverso 4 percorsi L1, L2, L3, L4 individuati dalla lista delle coordinate delle caselle attraversate:

1) L1 = [(3,2),(3,3),(4,3),(4,4),(5,4),(6,4),(7,4),(7,5),(8,5),(9,5)], valore dei premi raccolti 12,
2) L2 = [(3,2),(4,2),(4,3),(4,4),(5,4),(6,4),(7,4),(7,5),(8,5),(9,5)], valore dei premi raccolti 10,
3) L3 = [(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(6,3),(6,4),(7,4),(7,5),(8,5),(9,5)], valore dei premi raccolti 9,
4) L4 = [(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(7,2),(8,2),(8,3),(9,3),(9,4),(9,5)], valore dei premi raccolti 11.

Per decretare il migliore, ad ogni percorso viene assegnato un punteggio dato dalla somma dei premi raccoglibili su quel percorso; la graduatoria dei percorsi è quindi la seguente: L1, L4, L2, L3.

PROBLEMA
La partenza è nella cella (1,1) e il tesoro si trova nella cella (9,9); i premi sono i seguenti:

[(2,7,20),(3,4,15),(4,7,30),(4,6,10),(5,2,3),(5,4,3),(6,6,40),(5,8,10)]

gli ostacoli si trovano in:

[(2,2),(2,4),(2,6),(3,7),(4,3),(4,5),(5,7),(6,5),(6,7),(7,5),(8,7),(8,9),(8,2),(8,5),(7,3)].

Trovare: il numero N1 dei percorsi diversi in cui si raccolgono premi con valore totale 3;
il numero N2 dei percorsi diversi in cui si raccolgono premi con valore totale 6;
il numero N3 dei percorsi diversi in cui si raccolgono premi con valore totale 50;
il numero N4 dei percorsi diversi in cui si raccolgono premi con valore totale 65.

N1	
N2	
N3	
N4	

SOLUZIONE

N1	6
N2	3
N3	3
N4	6

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
34 [10, 30, 50, 50, 50, 65, 65, 65, 58, 58, 18, 65, 65, 65, 58, 58, 18, 46, 46, 6, 3, 3, 46, 46, 6, 3, 3, 46, 46, 6, 3, 3, 0, 0]

ESERCIZIO 3 (T.) (COMPRENSIONE DEL LINGUAGGIO)

Nel seguente testo sostituire a X1, X2, X3 la scelta più appropriata, tra quelle proposte. (N.B. solo una scelta è *compatibile* con le conoscenze all’inizio del 2012, reperibili sulla documentazione scientifica, per esempio su Internet).

Universo “oscuro” perché, al momento e forse per sempre, è sconosciuto: il X1 per cento dell’universo è qualcosa di misterioso chiamato materia oscura; il X2 per cento è qualcosa di ancor più misterioso chiamato energia oscura. Ciò significa che la materia che ci costituisce è solo il X3 per cento.

Lista dei possibili valori tra cui scegliere per X1, X2 e X3: [23, 30, 14, 73, 69, 4, 1, 8, 70, 28, 9, 77]

X1	
X2	
X3	

SOLUZIONE

X1	23
X2	73
X3	4

ESERCIZIO 4 (T.) (COMBINATORIA)

PREMESSA
L’insieme P delle *espressioni parentetiche corrette* è formato da elementi costruiti con i simboli di parentesi graffa aperta: “{” e parentesi graffa chiusa: “}” e con le seguenti regole:

1. {} appartiene a P;
2. se A appartiene a P, allora anche {A} appartiene a P;
3. se A e B appartengono a P, allora anche AB appartiene a P.

Per esempio

{}{{}}, {}{}, {{{}}}

sono espressioni parentetiche corrette, mentre

}{, {{}, {{}}}

non lo sono. In maniera informale, in una espressione parentetica corretta ogni graffa aperta viene “chiusa” successivamente e una graffa chiusa “chiude” una graffa aperta precedente.
Si dice *lunghezza* di un elemento di P il numero totale di graffe (aperte o chiuse) che lo compongono; si dice *profondità* di un elemento E di P il numero di “annidamenti” d(E) definito come segue:

$$d(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } E = \{\} \\ d(A)+1 & \text{se } E = \{A\} \text{ e A è in P} \\ \max(d(A), d(B)) & \text{se } E = AB \text{ e A,B sono in P} \end{cases}$$

Per esempio

{}{{}}

ha lunghezza 6 (cioè in totale 6 graffe) e profondità 2. In generale il termine S(<L>, <D>, <N>) asserisce che esistono N espressioni parentetiche corrette di lunghezza L e profondità D. Per esempio il termine S(6,1,1) asserisce (correttamente) che esiste una sola espressione di 6 parentesi e profondità 1:

{}{}{}

Il termine S(8,4,1) asserisce (correttamente) che esiste una sola espressione di 8 parentesi e profondità 4:

{{{{}}}}

Il termine S(8,3,5) asserisce (correttamente) che esistono 5 espressioni di 8 parentesi e profondità 3:

{}{{{}}}, {{}{{}}}, {{{}{}}}, {{{}}{}}, {{{}}}{}

PROBLEMA
Completare le seguenti asserzioni
S(10,1,N1), S(10,4,N4), S(10,5,N5), S(10,6,N6).

N1	
N4	
N5	
N6	

SOLUZIONE

N1	1
N4	7
N5	1
N6	0

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Profondità 1: {}{}{}{}{}

4: {{{{}}}}{}, {{{{}}}{}}, {{{{}}{}}}, {{{{}{}}}}, {{{}{{}}}}, {{}{{{}}}}, {}{{{{}}}}

5: {{{{{}}}}}

6:

ESERCIZIO 5 {C.) DATA BASE

PREMESSA

Per gestire gli articoli in vendita presso un grande magazzino vengono utilizzate quattro tabelle il cui contenuto è descritto dai quattro termini seguenti:

tab1{<sigla dell'articolo>,<disponibilità all’apertura>,<prezzo di vendita>)
tab2{<sigla dell'articolo>,<sigla del fornitore>,<prezzo di acquisto>)
tab3{<sigla dell'articolo>,<tipo merceologico>, <reparto>)
tab4{<sigla dell'articolo>,<disponibilità alla chiusura>)

A fine giornata, la consistenza di queste tabelle è la seguente:

tab1(a21, 120, 20). tab1(a22, 100, 25). tab1(a23, 220, 30). tab1(a24, 130, 40).
tab1(a25, 195, 10). tab1(a26, 180, 50). tab1(a27, 145, 45). tab1(a28, 110, 35).
tab1(a29, 210, 60). tab1(a30, 220, 70). tab1(a31, 130, 65). tab1(a32, 215, 75).
tab1(a33, 145, 40). tab1(a34, 120, 35). tab1(a35, 210, 60). tab1(a36, 220, 60).
tab1(a37, 130, 65). tab1(a38, 205, 75).

tab2(a21, f01, 10). tab2(a22, f03, 15). tab2(a23, f05, 20). tab2(a24, f02, 30).
tab2(a25, f04, 5). tab2(a26, f02, 30). tab2(a27, f03, 40). tab2(a28, f01, 25).
tab2(a29, f03, 30). tab2(a30, f01, 60). tab2(a31, f02, 45). tab2(a32, f01, 35).
tab2(a33, f04, 20). tab2(a34, f05, 15). tab2(a35, f01, 15). tab2(a36, f05, 30).
tab2(a37, f03, 45). tab2(a38, f05, 35).

tab3(a21, a,5). tab3(a22, a,6). tab3(a23, b,5). tab3(a24, b,7). tab3(a25, c,5). tab3(a26, c,2).
tab3(a27, d,7). tab3(a28, a,2). tab3(a29, b,4). tab3(a30, c,4). tab3(a31, b,3). tab3(a32, c,3).
tab3(a33, d,2). tab3(a34, b,6). tab3(a35, a,4). tab3(a36, b,7). tab3(a37, d,1). tab3(a38, b,5).

tab4(a21,60). tab4(a22,60). tab4(a23,100). tab4(a24,80). tab4(a25,90). tab4(a26,50).
tab4(a27,45). tab4(a28,30). tab4(a29,180). tab4(a30,150). tab4(a31,30). tab4(a32,50).
tab4(a33,25). tab4(a34,50). tab4(a35,60). tab4(a36,120). tab4(a37,110). tab4(a38,5).

Da queste tabelle si ricavano per esempio le seguenti informazioni: l’articolo a21 appartiene al tipo merceologico a, proviene dal fornitore f01, ne sono stati venduti 60 esemplari con un guadagno unitario di 10 euro e guadagno giornaliero di 600 euro.

PROBLEMA

Trovare:

- la lista L1 degli articoli distribuiti dal fornitore f05,
- la lista L2 dei fornitori che distribuiscono articoli di tipo merceologico b,
- la lista L3 dei reparti (elencati in ordine crescente) in cui sono esposti articoli del fornitore f03,
- la lista L4 degli articoli del reparto 4 venduti a un prezzo maggiore o uguale al 100% del costo.

NB. Gli elementi di una lista vanno riportati in ordine crescente rispettando i seguenti criteri:

a21<a22<a23,…; f01<f02<f03<f04<…;

quando una lista non contiene elementi, si dice che la lista è vuota e si scrive [] (parentesi quadra aperta seguita *immediatamente* da parentesi quadra chiusa).

L1	
L2	
L3	
L4	

SOLUZIONE

L1	[a23, a34, a36, a38]
L2	[f02, f03, f05]
L3	[1,4,6,7]
L4	[a29,a35]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

?- ps1(f05,L).
L = [a23, a34, a36, a38].

ps2(b,L).
L = [f02, f03, f02, f05, f05, f05].

30 ?- ps3(f03,L).
L = [1, 3, 4, 1].

?- ps4(5,L).
L = [a21, a25, a34, a38].

ESERCIZIO 6 (C.) (KNAPSACK)

PROBLEMA

Nelle lezioni di educazione alimentare, i ragazzi hanno classificato alcuni alimenti in relazione al valore proteico e al loro costo. I risultati di questa classificazione sono descritti da una tabella avente la dichiarazione

tabx(<sigla dell’alimento>,<tipo>, <valore proteico>, <costo>).

Il tipo si riferisce all’origine dell’alimento: “a” per vegetali, “b” per latticini, “c” per carni.

Il contenuto della tabella, che riporta i dati relativi a un certo numero di alimenti, è il seguente:

tabs1(m1,a,96,145).	tabs1(m2,a,76,144).	tabs1(m3,b,80,131).
tabs1(m4,c,74,130).	tabs1(m5,a,86,150).	tabs1(m6,b,99,150).
tabs1(m7,b,82,138).	tabs1(m8,c,97,151).	tabs1(m9,b,98,149).
tabs1(m10,a,92,140).	tabs1(m11,c,78,159).	tabs1(m12,a,79,130).
tabs1(m13,b,85,141).	tabs1(m14,c,92,132).	tabs1(m15,c,99,148).
tabs1(m16,c,87,135).	tabs1(m17,c,97,140).	tabs1(m18,c,99,105).
tabs1(m19,a,95,140).	tabs1(m20,b,95,140).	tabs1(m21,c,84,198).
tabs1(m22,a,98,142).	tabs1(m23,b,80,140).	tabs1(m24,c,98,140).

Trovare le liste La, Lb e Lc delle sigle che corrispondono alle tre diete che si possono costruire con 2 elementi dello stesso tipo (rispettivamente vegetali, latticini e carne) aventi un costo non superiore a 290 e col maggior valore proteico Pa, Pb e Pc

N.B. Le sigle nelle liste devono comparire in ordine *crescente*: m1 prima di m2; m2 prima di m3, … m14 prima di m15, ecc.

La	
Lb	
Lc	
Pa	
Pb	
Pc	

SOLUZIONE

La	[m1,m22]
Lb	[m6,m20]
Lc	[m15,m18]
Pa	194
Pb	194
Pc	198

COMMENTO ALLA SOLUZIONE

8 ?- ps(a,2,190,290).
a, [m19, m1], 191, 285
a, [m22, m19], 193, 282
a, [m22, m10], 190, 282
a, [m22, m1], 194, 287
true .

9 ?- ps(b,2,190,290).

b, [m20, m9], 193, 289
b, [m20, m6], 194, 290
true .

10 ?- ps(c,2,190,290).
c, [m15, m14], 191, 280
c, [m17, m15], 196, 288
c, [m18, m17], 196, 245
c, [m18, m15], 198, 253
c, [m18, m14], 191, 237
c, [m18, m8], 196, 256
c, [m24, m18], 197, 245
c, [m24, m17], 195, 280
c, [m24, m15], 197, 288
c, [m24, m14], 190, 272
true .

ESERCIZIO 7 (C.) (PSEUDOPROGRAMMI)

PREMESSA
Per descrivere una procedura di calcolo viene spesso usato uno pseudolinguaggio che utilizza parole inglesi e simboli matematici. Compresa la sequenza dei calcoli descritti nella procedura che segue, eseguire le operazioni indicate utilizzando per gli elementi di input (detti variabili di input) i valori numerici sotto elencati e calcolare i valori degli elementi di output (detti variabili di output).

PROBLEMA

```
procedure PROVA;
variables N, S, Q, I, W integer;
input N;
S ← 0;
Q ← 1;
for I from 1 to N do
        W ← Q+S;
        S ← Q;
        Q ← W;
endfor;
output S, Q, W;
endprocedure;
```

Eseguire i calcoli quando il valore in input per N è 8 e completare la tabella seguente.

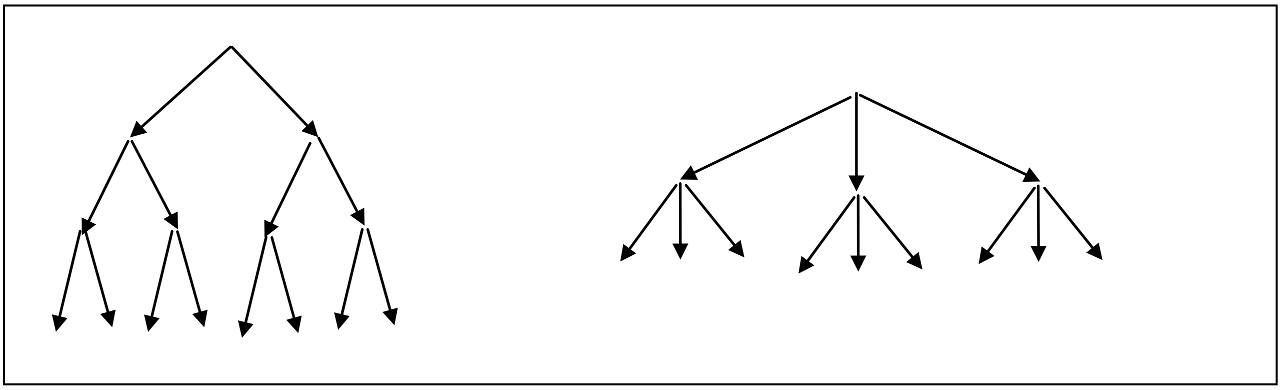
S	
Q	
W	

SOLUZIONE

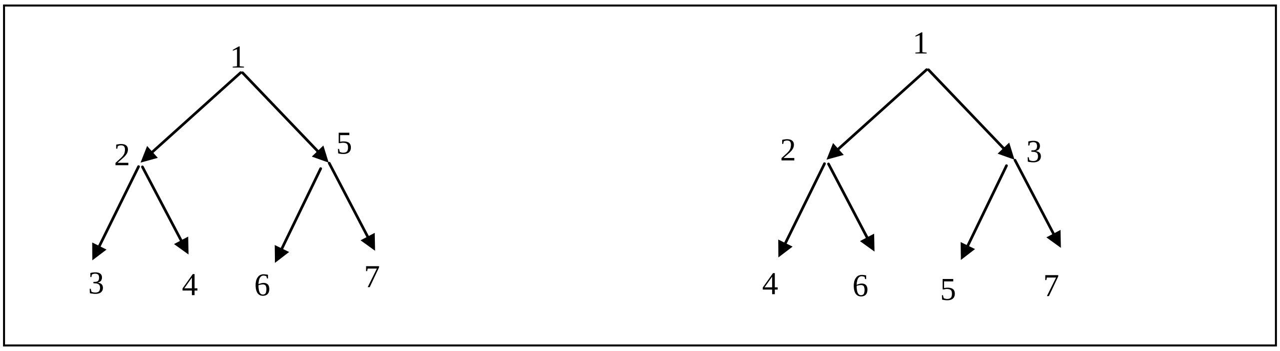
S	21
Q	34
W	34

ESERCIZIO 8 (T.) (COMBINATORIA)

PREMESSA
Un albero *completo* di *arità* P è un albero in cui tutte le foglie hanno la stessa distanza dalla radice (detta *profondità*: è il numero di rami tra la foglia e la radice) e tutti i nodi interni hanno P diramazioni.



Nella figura precedente, quello di sinistra è un albero completo di arità 2 e profondità 3; quello di destra ha arità 3 e profondità 2.
È facile determinare il numero totale N dei nodi (foglie, nodi interni, radice) di tali alberi. Una *numerazione ammissibile* di un albero completo si ottiene associando a ogni nodo un numero (da 1 a N) in modo che tale numero sia più piccolo del numero associato a ogni discendente del nodo.



La figura precedente mostra due numerazioni ammissibili per un albero completo di arità 2 e profondità 2.

PROBLEMA
Dato un albero di arità 2 e profondità 2 (come in figura) determinare il numero M di numerazioni ammissibili.

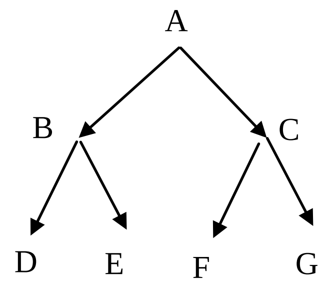
M	

SOLUZIONE (attenzione: variazione rispetto alla prova online)

M	80

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Si osservi la figura seguente in cui i nodi sono etichettati con lettere. Occorre assegnare i numeri da 1 a 7. C’è una sola scelta per numerare il nodo A (cioè 1).

Per B si può scegliere tra 2,3,4,5 (6 o 7 no perché non si potrebbero numerare D e E); se B=2 ci sono 5•4 maniere di numerare D e E; se B=3 ci sono 4•3 maniere di numerare D e E; se B=4 ci sono 3•2 maniere di numerare D e E; se B=5 ci sono 2•1 maniere di numerare D e E. Numerati A, B, D, e E, rimangono tre numeri da assegnare: il più piccolo obbligatoriamente a C e quindi rimangono due scelte per F e G. In totale (20+12+6+2)2 = 80.



ESERCIZIO 9 (T.) (COMBINATORIA)

PROBLEMA

Un corridoio ha N lampade, disposte a intervalli regolari sul soffitto, numerate con i numeri successivi da 1 a N: percorrendo il corridoio, in un verso, si incontra prima la lampada 1, poi la 2, eccetera fino alla N. Ogni lampada può essere accesa o spenta ed è dotata di un interruttore (posto lungo la parete del corridoio ed etichettato con lo stesso numero della lampada) che, premuto, la spegne se accesa e la accende se spenta. Inizialmente tutte le lampadine sono spente.
L'inserviente Pamulkar è incaricato di uno strano compito: deve percorrere il corridoio avanti e indietro esattamente N volte; all'andata I-esima (nel verso dei numeri crescenti) preme tutti gli interruttori il cui numero è divisibile per I; al ritorno non fa nulla.
Dopo gli N percorsi la lampada numero N è accesa o spenta? Determinarlo per i diversi valori di N, scrivendo nella seconda colonna ACCESA o SPENTA a seconda dei casi.

N = 3	
N = 36	

SOLUZIONE

N = 3	SPENTA
N = 36	ACCESA

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

La lampadina N è inizialmente spenta; al primo giro viene accesa; poi cambia di stato al giro I-esimo se I divide N; occorre quindi determinare tutti i fattori (diversi) di N (1 e N compresi): se sono in numero dispari, alla fine la lampadina è accesa, se sono pari è spenta.
fattori di 3: 1,3.
fattori di 36: 1,2,3,4,6,9,12,18,36

ESERCIZIO 10 (T.) ARITMETICA

PROBLEMA
La funzione fattoriale $n!$ è definita come segue per tutti i numeri interi non negativi n:

$$0! = 1$$
$$n! = n \times (n-1)! \quad \text{per } n > 0$$

Si dice che a divide b se esiste un intero k tale che
$k \times a = b$

Completare la seguente tabella

Il fattoriale di	è divisibile per	rispondere SI o NO
6	9	
6	27	
20	10000	
20	100000	

SOLUZIONE

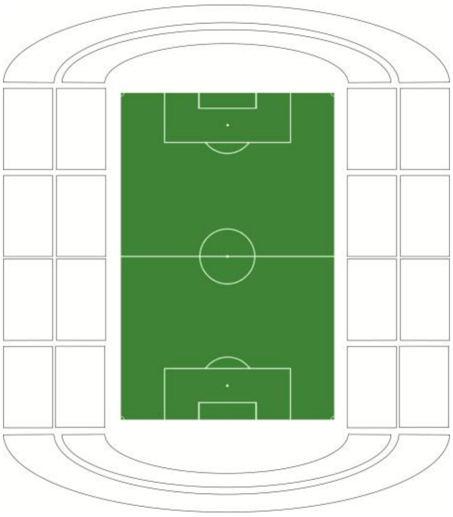
Il fattoriale di	è divisibile per	rispondere SI o NO
6	9	SI
6	27	NO
20	10000	SI
20	100000	NO

È sufficiente scrivere la scomposizione in fattori (primi) del divisore e confrontarla col fattoriale.

ESERCIZIO 11 (CASTORO)

In a word processor, the following operations can be applied to a picture:
1. Select one shape.
2. Select one shape and add to the already selected one(s) (with SHIFT).
3. Choose a color of selected shapes.
4. Duplicate the selected shapes.
5. Move the selected shapes by parallel displacement (with CTRL).

What is the least number N of operations, needed to paint stadium tribunes on the left picture, as it is shown on the right?



N	

SOLUZIONE

N	18

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
1-6: select and paint blue shapes;
7-12: select and paint yellow shapes;
11-18: select and paint red shapes.

ESERCIZIO 12 (CASTORO)

Two teams from neighbouring rivers play in the final match of Beaver Chess Cup. The match is conducted on four boards. Beaver B plays against beaver H, beaver C against beaver D. The following pairs are from the same river: A and B, D and E, H and G, F and H.
Determine the list L of all members of the team in which beaver A plays (in alphabetic order).

L	

SOLUZIONE

L	[A,B,D,E]